Übungen

Einführung in die Dynamischen Systeme

Bernold Fiedler, Stefan Liebscher

Abgabe: Donnerstag, 17.06.2004, in der Vorlesung

Aufgabe 33: Wieviele Ziffern (in Dezimaldarstellung) besitzt das einmillionste Glied der Folge (1, 3, 8, 20, 48, 112, ...), das heißt $x_n = 4x_{n-1} - 4x_{n-2}$ mit $x_0 = 1$ und $x_1 = 3$?

Aufgabe 34: In Analogie zur Darstellung eines Flusses zu einem Vektorfeld durch Variation der Konstanten wollen wir die Dynamik einer Abbildung beschreiben.

Gegeben sei also ein Banachraum X sowie Abbildungen $A : X \to X$ linear, $f : \mathbb{N} \to X$. Vervollständige nun die Formel

$$x(n) \;=\; A^{\bigcirc} x_0 + \sum_{k=\bigcirc}^{\bigcirc} A^{\bigcirc} f(\bigcirc),$$

so dass dadurch die eindeutige Lösung $x : \mathbb{N} \to X$ des Anfangswertproblems

$$x(0) \;=\; x_0, \qquad x(n+1) \;=\; A\,x(n) + f(n), \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

gegeben ist. (Beweise dies!)

Aufgabe 35: Jede Trajektorie des Lipschitz-Vektorfeldes f sei beschränkt. Beweise oder widerlege: Gilt für die Anfangswerte

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}(x_n, x) \;=\; 0,$$

so auch für ihre ω-Limesmengen

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}(\omega(x_n), \omega(x)) \;=\; 0.$$

Dabei benutzen wir als Abstandsbegriff zweier Mengen den symmetrischen Hausdorff-Abstand:

$$\operatorname{dist}(A, B) \;:=\; \max\left(\sup_{a\in A}\inf_{b\in B} \operatorname{dist}(a,b)\,,\; \sup_{b\in B}\inf_{a\in A} \operatorname{dist}(a,b)\right).$$

Aufgabe 36: In unserem Garten betrachten wir noch einmal die Anzahl k_n von Fibonaccis Kaninchenpaaren nach n Monaten. Wie in der Vorlesung bekommt jedes Paar ab seinem zweiten Lebensmonat monatlich genau ein Paar Junge.

$$k_{n+1} \;=\; k_n + k_{n-1}, \qquad k_0 = k_1 = 1.$$

(i) Schreibe die obige 2-Term-Rekursion als lineare Iteration $x_{n+1} = Ax_n$ für einen geeignet gewählten Vektor x und eine Matrix A.

(ii) Transformiere A auf Jordansche Normalform und bestimme so eine explizite Lösungsformel für k_n.

Freiwilliger Zusatz: Was passiert, wenn wir in jedem Monat noch ein zusätzliches neugeborenes Kaninchenpaar in den Garten setzen? (Wie lautet dann die Rekursionsgleichung und die explizite Lösungsformel?)