Übungen

Einführung in die Dynamischen Systeme

Bernold Fiedler, Stefan Liebscher

Abgabe: Donnerstag, 24.06.2004, in der Vorlesung

Aufgabe 37: Seien $A \subseteq B \subseteq X$ Mengen und φ_t ein Fluss auf X. A heißt *ketten-rekurrent* in B, wenn es für jedes $x_0 \in A$ und jedes $\varepsilon > 0$, $T > 0$ ein positives n sowie Zeiten $t_0, \ldots, t_{n-1} \geq T$ und Punkte $x_1, \ldots, x_{n-1} \in B$ gibt, so dass für $i = 0, \ldots, n-1$ gilt

$$\operatorname{dist}\left(\varphi_{t_i}(x_i), x_{i+1}\right) < \varepsilon.$$

Dabei ist $x_n = x_0$ gesetzt. A heißt *rekurrent*, wenn man stets $n = 1$ wählen kann, d.h. wenn x_0 in $\omega(x_0)$ liegt.

Interpretiere Kettenrekurrenz, z.B. als Rundungs- oder Messfehler. Zeige, dass für $y_0 \in X$ die ω-Limesmenge $\omega(y_0)$ ketten-rekurrent in X aber nicht unbedingt rekurrent ist.

Freiwilliger Zusatz: Sei die Trajektorie $\varphi_t(y_0)$ beschränkt. Ist dann $\omega(y_0)$ ketten-rekurrent sogar in $\omega(y_0)$?

Aufgabe 38: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $A \in C^1(I, \mathbb{R}^{n \times n})$. Zeige, dass

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{A(t)} \;=\; \dot{A}(t)\, e^{A(t)} \;=\; e^{A(t)}\, \dot{A}(t),$$

wenn $[A(t), \dot{A}(t)] := A(t)\dot{A}(t) - \dot{A}(t)A(t) = 0$ für alle $t \in I$.

Aufgabe 39: Betrachte die autonome Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

mit Lipschitz-stetiger rechter Seite. Es gelte für alle $x \in \mathbb{R}^n$ die Ungleichung

$$(*) \qquad f(x)^T x \geq \|x\|^3_{\mathbb{R}^n}.$$

Zeige: Dann ist für jeden Anfangswert $x_0 \neq 0$ die maximale Existenzzeit $t_+(x_0)$ der Lösung $x(t)$ beschränkt.

Freiwilliger Zusatz: Ist $x = 0$ automatisch eine Ruhelage, wenn $(*)$ erfüllt ist?

Aufgabe 40: Der Satz von Grobman&Hartman behandelt Umgebungen hyperbolischer Fixpunkte und sichert dort die Flussäquivalenz zur Linearisierung. Gib zwei möglichst einfache Beispiele für Vektorfelder mit einem *nicht-hyperbolischen* Fixpunkt an. Das erste soll lokal flussäquivalent zur Linearisierung in diesem Fixpunkt sein, das zweite nicht.