Übungen

Einführung in die Dynamischen Systeme

Bernold Fiedler, Stefan Liebscher

Abgabe: Donnerstag, 01.07.2004, in der Vorlesung

Aufgabe 41: Gegeben ein stetiger Fluss auf X und eine nicht-leere, kompakte, invariante Teilmenge M von X. Beweise oder widerlege: M ist genau dann stabil, wenn jede Umgebung von M eine positiv invariante Umgebung von M enthält.

Aufgabe 42: Ein Student hat dem Professor sein Manuskript geklaut. Zur Zeit $t = 0$ beginnt der Dieb mit konstanter Geschwindigkeit v auf einem Kreis mit Radius r entlangzulaufen. Der Professor startet ebenfalls zur Zeit $t = 0$ im Mittelpunkt des Kreises und läuft mit konstanter Geschwindigkeit w immer genau auf den Dieb zu. Zeige, dass im Fall $w < v$ der Professor den Studenten nie erreicht, sondern sich immer mehr einer Kreisbahn annähert. Welchen Radius hat dieser Kreis? Ist diese Kreisbahn ein stabiler periodischer Orbit? Wie sieht es für gut durchtrainierte Professoren ($w > v$) aus?

Hinweis: Mögliche Koordinaten sind beispielsweise die Entfernung $\varrho(t)$ zwischen Professor und Student und der Winkel $\theta(t)$ zwischen den Verbindungslinien vom Kreismittelpunkt zu den beiden Akteuren.

Aufgabe 43: Zeige, dass die Differentialgleichung

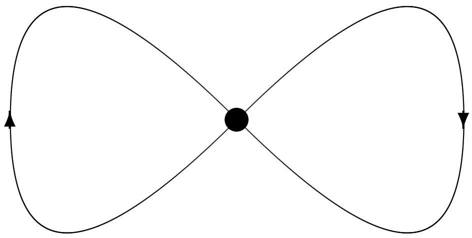
$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= (1 - x^2 - y^2)y - x \end{aligned}$$

genau eine (echt) periodische Lösung besitzt. Wie lautet die Matrix-Differentialgleichung für die Ableitung nach den Anfangsbedingungen (x_0, y_0) entlang dieser Lösung ?

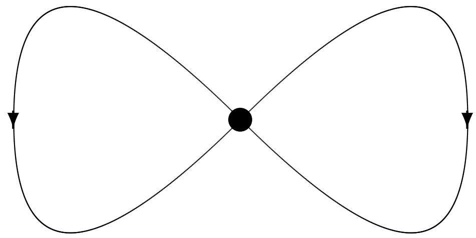
(bitte wenden!)

Aufgabe 44: Welche der folgenden Mengen können ω-Limesmengen eines Flusses im $\mathbb{R}^2$ sein und welche nicht? Begründe, ohne explizite Vektorfelder anzugeben.

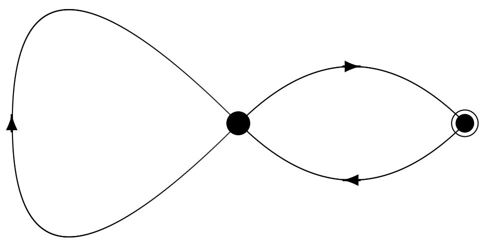
(i)



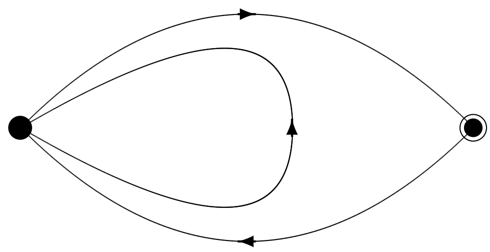
(ii)



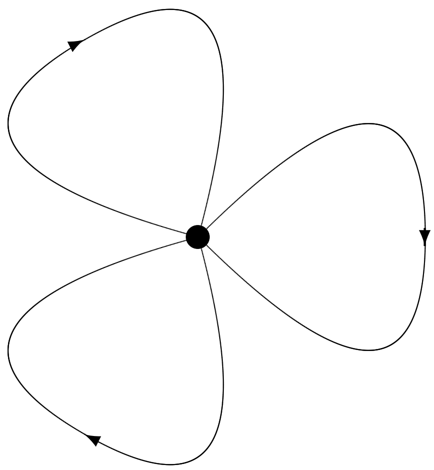
(iii)



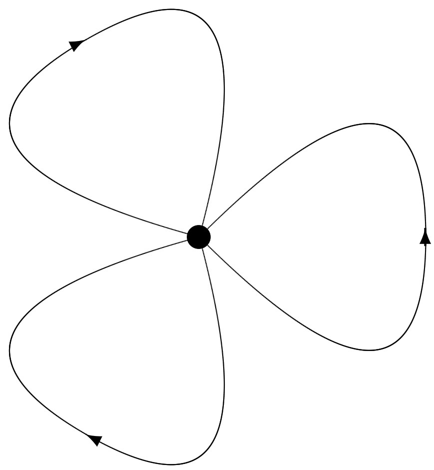
(iv)



(v)



(vi)



Dabei bezeichnen Scheiben ● Gleichgewichte, beringte Scheiben ◉ stellen hyperbolische Sättel dar.