Freiwillige (Ferien)-Übungen
Einführung in die Dynamischen Systeme
Bernold Fiedler, Stefan Liebscher
keine Abgabe

Besprechung ggf. in den Übungen zur Vorlesung Dynamische Systeme II

Aufgabe Z1: Beweise oder widerlege für Vektorfelder f im $\mathbb{R}^3$: Gilt $\operatorname{div} f = 0$ so hat f ein nichttriviales, reguläres Erstes Integral. Dabei heißt ein Erstes Integral I genau dann regulär, falls ∇I nur in Nullstellen des Vektorfeldes verschwindet.

Aufgabe Z2: Beweise oder widerlege den Satz von Poincaré & Bendixson für Flüsse auf

- (i) der Sphäre S^2 ,
- (ii) dem Torus T^2 .

Aufgabe Z3: Sei $X \subset \mathbb{R}^2$ eine Kreisscheibe mit ℓ disjunkten kreisförmigen Löchern und f ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf X mit $\operatorname{div} f > 0$. Zeige, dass dann der zugehörige Fluss höchstens ℓ periodische Orbits in X besitzen kann.

Aufgabe Z4: Sei f ein ebenes C^1 -Vektorfeld und der Vorwärtsorbit $\gamma_+(x_0)$ eines Punktes $x_0 \in \mathbb{R}^2$ sei beschränkt. Weiter sei $\omega(x_0)$ weder ein Gleichgewicht noch ein periodischer Orbit.

Zeige, dass $\omega(x_0)$ sich als Vereinigung $\omega(x_0) = E \cup H$ schreiben lässt, wobei E aus lauter Gleichgewichten und H aus einer höchstens abzählbaren Anzahl von heteroklinen Orbits besteht.

Aufgabe Z5: Sei $x = 0$ ein *isoliertes* Gleichgewicht eines Flusses im $\mathbb{R}^2$. Zeige:

- (i) $x = 0$ ist genau dann stabil aber kein Attraktor, wenn jede Umgebung von $x = 0$ (mindestens) einen (echt) periodischen Orbit enthält.
- (ii) Falls eine C^2 -Lyapunov-Funktion V mit $\nabla V(0) = 0$ und indefiniter Hesse-Matrix $\nabla^2 V(0)$ existiert, so ist $x = 0$ instabil.

Aufgabe Z6: Ein Fluss Φ_t auf $X = \mathbb{R}^2$ besitze einen echt periodischen Orbit γ . Zeige, dass dann das Innere I von γ ein Gleichgewicht enthält, das heißt, es gibt ein $x_0 \in I$ mit $\Phi_t(x_0) = x_0$ für alle t .

Hinweis: Benutze hierzu entweder den BROUWERSCHEN Fixpunktsatz oder führe einen indirekten Beweis und zeige mit Hilfe des Satzes von POINCARÉ-BENDIXSON die Existenz periodischer Orbits beliebig kleiner umschlossener Fläche.

Aufgabe Z7: [Diskretes „Lyapunov Funktional“] Wir stellen uns ein Dreieck gekoppelter „Oszillatoren“ vor, so dass jeder den nächsten anregt:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f(x_i, x_{i-1}), & (i \bmod n), n = 3, \\ x(0) &:= x^0 \neq 0, & x = (x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Sei dabei f glatt, $f(0, 0) = 0$ und $f(0, y)y > 0$ für alle $y \neq 0$. Der zugehörige Fluss existiere global. Falls alle $x_i \neq 0$ sind, definiere $z(x)$ als Anzahl der i , für die $x_i x_{i-1} < 0$ gilt. Bezeichne ferner $S(x^0)$ die Menge der Zeiten t , zu denen $x_i = 0$ für mindestens ein i ist. Zeige:

- (i) S ist diskret;
- (ii) $z(x(t_1)) \geq z(x(t_2))$, wenn $t_1 < t_2$ beide nicht in S liegen.

Freiwilliger Zusatz: Gilt das auch für eine höhere Anzahl $n > 3$ von Oszillatoren?

Aufgabe Z8: Zeige, dass das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = \cos \left(\frac{200t^4 + 200t + 4}{2004 + t - (x+1)(x+1)(x^2+t)} \right),$$

$x(0) = 1$ für $0 \leq t \leq 5$ eine eindeutige Lösung besitzt.

Aufgabe Z9: [FLOQUET-Theorie für diskrete dynamische Systeme] Betrachte die Iteration

$$x_{k+1} = A_k x_k$$

mit $A_{k+p} = A_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und einer festen Periode $p \in \mathbb{N}$. Weiter seien alle Matrizen A_k regulär.

Zeige, dass Matrizen $B, C_k, k \in \mathbb{N}$ existieren mit $C_k = C_{k+p}$ und

$$\prod_{k=0}^m A_k = C_m B^m \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe Z10: [FLOQUET-Theorie in einer Dimension] Betrachte das zeitabhängige, periodische Vektorfeld

$$\dot{x} = a(t)x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad a(t + 2\pi) = a(t).$$

Zeige, dass die Lösung dargestellt werden kann als

$$x(t) = e^{bt} q(t) x_0,$$

mit periodischer Funktion $q, q(t + 2\pi) = q(t)$, und einer Konstanten $b \in \mathbb{R}$. Bestimme b und q aus a .

Aufgabe Z11: Plote mit `dstool` die „Zeit- 2π -Abbildung“ (POINCARÉ-Abbildung)

$$P: S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x(0) \\ \dot{x}(0) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x(2\pi) \\ \dot{x}(2\pi) \end{pmatrix}$$

der Schaukel ($x \approx 0$), bzw. des kopfstehenden Pendels ($x \approx \pi$)

$$\ddot{x} + (\omega^2 + \alpha^2 \sin t) \sin x = 0$$

- nahe $\underline{x} = 0$ mit $\omega = 0.05$ bzw. $\omega = 0.5$ und jeweils $\alpha = 0.2$
- nahe $\underline{x} = \pi$ mit $\omega = 0.05$ bzw. $\omega = 0.005$ und jeweils $\alpha = 0.2$ (hier den Anzeigebereich auf $|\dot{x}| \leq 0.03$ einschränken!).

Beurteile das Stabilitätsverhalten der Schaukel/des Pendels.

Hinweis zu Aufgabe Z11: Eine Möglichkeit, die Gleichung einzugeben, ist:

‡ Schaukel

$$x' = dx$$

$$dx' = -\sin(x) * (w * w + a * a * \sin(t))$$

$$t' = 1$$

$$\text{INITIAL } x \ 0.0 \ dx \ 0.3 \ t \ 0 \ w \ 0.05 \ a \ 0.2$$

$$\text{RANGE } x \ 0 \ 6.283 \ t \ 0 \ 6.283 \ dx \ -1 \ 1$$

$$\text{PERIODIC } x \ 0 \ 6.283 \ t \ 0 \ 6.283$$

Die Variablen t und x werden dann als periodisch erkannt.

Benutze dann die Option **Poincare Section** im Menü **Orbits** und plote beispielsweise immer Punkte bei $t = 0$. Bitte beachten, die Periodenanzahl (Parameter „Stop“ im Menü **Orbits**, Vorgabewert 5000) unbedingt auf etwa 100 zu verringern, oder sehr viel Zeit mitbringen!

Aufgabe Z12: [Arnol'd, Kapitel 3.16, Aufgabe 2] Anknüpfend an die vorangegangene Aufgabe wollen wir nun analytisch nachprüfen, dass die obere (im allgemeinen instabile) Gleichgewichtslage eines Pendels durch vertikale Schwingung des Aufhängepunktes stabilisiert werden kann.

Sei die Pendelarmlänge l . Die Anregung am Aufhängepunkt habe die Amplitude $a \ll l$ und die Periode 2τ , wobei zur Vereinfachung der Rechnung die Beschleunigung stückweise konstant $\pm c = \pm 8a/\tau^2$ sein soll. Die Bewegungsgleichung des Pendels kann dann auf die Gestalt

$$\ddot{x} = (\omega^2 \pm \alpha^2)x$$

mit $\omega^2 = g/l, \alpha^2 = c/l$ gebracht werden, wobei das Vorzeichen jeweils nach der Zeit τ wechselt. Für hinreichend schnelle Anregung ($\tau \ll 1$) ist $\alpha^2 = 8a/(l\tau^2) > \omega^2$.

Wie schnell muss die Anregung mindestens sein, damit das kopfstehende Pendel stabil wird?