Freiwillige (Ferien)-Übungen

Einführung in die Dynamischen Systeme

Bernold Fiedler, Stefan Liebscher

keine Abgabe

Besprechung ggf. in den Übungen zur Vorlesung Dynamische Systeme II

Aufgabe Z1: Beweise oder widerlege für Vektorfelder f im $\mathbb{R}^3$: Gilt $\operatorname{div} f = 0$ so hat f ein nichttriviales, reguläres Erstes Integral. Dabei heißt ein Erstes Integral I genau dann regulär, falls ∇I nur in Nullstellen des Vektorfeldes verschwindet.

Aufgabe Z2: Beweise oder widerlege den Satz von Poincaré & Bendixson für Flüsse auf

(i) der Sphäre S^2,

(ii) dem Torus T^2.

Aufgabe Z3: Sei $X \subset \mathbb{R}^2$ eine Kreisscheibe mit ℓ disjunkten kreisförmigen Löchern und f ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf X mit $\operatorname{div} f > 0$. Zeige, dass dann der zugehörige Fluss höchstens ℓ periodische Orbits in X besitzen kann.

Aufgabe Z4: Sei f ein ebenes C^1-Vektorfeld und der Vorwärtsorbit $\gamma_+(x_0)$ eines Punktes $x_0 \in \mathbb{R}^2$ sei beschränkt. Weiter sei $\omega(x_0)$ weder ein Gleichgewicht noch ein periodischer Orbit.

Zeige, dass $\omega(x_0)$ sich als Vereinigung $\omega(x_0) = E \cup H$ schreiben lässt, wobei E aus lauter Gleichgewichten und H aus einer höchstens abzählbaren Anzahl von heteroklinen Orbits besteht.

Aufgabe Z5: Sei $x = 0$ ein *isoliertes* Gleichgewicht eines Flusses im $\mathbb{R}^2$. Zeige:

(i) $x = 0$ ist genau dann stabil aber kein Attraktor, wenn jede Umgebung von $x = 0$ (mindestens) einen (echt) periodischen Orbit enthält.

(ii) Falls eine C^2-Lyapunov-Funktion V mit $\nabla V(0) = 0$ und indefiniter Hesse-Matrix $\nabla^2 V(0)$ existiert, so ist $x = 0$ instabil.

Aufgabe Z6: Ein Fluss Φ_t auf $X = \mathbb{R}^2$ besitze einen echt periodischen Orbit γ. Zeige, dass dann das Innere I von γ ein Gleichgewicht enthält, das heißt, es gibt ein $x_0 \in I$ mit $\Phi_t(x_0) = x_0$ für alle t.

Hinweis: Benutze hierzu entweder den Brouwerschen Fixpunktsatz oder führe einen indirekten Beweis und zeige mit Hilfe des Satzes von Poincaré-Bendixson die Existenz periodischer Orbits beliebig kleiner umschlossener Fläche.

Aufgabe Z7: [Diskretes „Lyapunov Funktional“] Wir stellen uns ein Dreieck gekoppelter „Oszillatoren“ vor, so dass jeder den nächsten anregt:

$$\begin{array}{rcll} \dot{x}_i &=& f(x_i, x_{i-1}), & (i \bmod n), n = 3, \\ x(0) &:=& x^0 \neq 0, & x = (x_0, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n. \end{array}$$

Sei dabei f glatt, $f(0,0) = 0$ und $f(0,y)y > 0$ für alle $y \neq 0$. Der zugehörige Fluss existiere global. Falls alle $x_i \neq 0$ sind, definiere $z(x)$ als Anzahl der i, für die $x_i x_{i-1} < 0$ gilt. Bezeichne ferner $S(x^0)$ die Menge der Zeiten t, zu denen $x_i = 0$ für mindestens ein i ist. Zeige:

(i) S ist diskret;

(ii) $z(x(t_1)) \geq z(x(t_2))$, wenn $t_1 < t_2$ beide nicht in S liegen.

Freiwilliger Zusatz: Gilt das auch für eine höhere Anzahl $n > 3$ von Oszillatoren?

Aufgabe Z8: Zeige, dass das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = \cos\left(\frac{200t^4 + 200t + 4}{2004 + t - (x+1)(x+1)(x^2+t)}\right),$$

$x(0) = 1$ für $0 \leq t \leq 5$ eine eindeutige Lösung besitzt.

Aufgabe Z9: [FLOQUET-Theorie für diskrete dynamische Systeme] Betrachte die Iteration

$$x_{k+1} = A_k x_k$$

mit $A_{k+p} = A_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und einer feste Periode $p \in \mathbb{N}$. Weiter seien alle Matrizen A_k regulär.

Zeige, dass Matrizen B, C_k, $k \in \mathbb{N}$ existieren mit $C_k = C_{k+p}$ und

$$\prod_{k=0}^{m} A_k = C_m B^m \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe Z10: [FLOQUET-Theorie in einer Dimension] Betrachte das zeitabhängige, periodische Vektorfeld

$$\dot{x} = a(t)x, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad a(t+2\pi) = a(t).$$

Zeige, dass die Lösung dargestellt werden kann als

$$x(t) = e^{bt} q(t) x_0,$$

mit periodischer Funktion q, $q(t+2\pi) = q(t)$, und einer Konstanten $b \in \mathbb{R}$. Bestimme b und q aus a.

Aufgabe Z11: Plotte mit `dstool` die „Zeit-2π–Abbildung“ (POINCARÉ-Abbildung)

$$\begin{array}{ccc} P : S^1 \times \mathbb{R} & \to & S^1 \times \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x(0) \\ \dot{x}(0) \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x(2\pi) \\ \dot{x}(2\pi) \end{pmatrix} \end{array}$$

der Schaukel ($x \approx 0$), bzw. des kopfstehenden Pendels ($x \approx \pi$)

$$\ddot{x} + (\omega^2 + \alpha^2 \sin t) \sin x = 0$$

a) nahe $\underline{x} = 0$ mit $\omega = 0.05$ bzw. $\omega = 0.5$ und jeweils $\alpha = 0.2$

b) nahe $\underline{x} = \pi$ mit $\omega = 0.05$ bzw. $\omega = 0.005$ und jeweils $\alpha = 0.2$ (hier den Anzeigebereich auf $|\dot{x}| \leq 0.03$ einschränken!).

Beurteile das Stabilitätsverhalten der Schaukel/des Pendels.

Hinweis zu Aufgabe Z11: Eine Möglichkeit, die Gleichung einzugeben, ist:

```
♯ Schaukel
x’ = y
dx’ = -sin(x)*(w*w+a*a*sin(t))
t’ = 1
INITIAL x 0.0 dx 0.3 t 0 w 0.05 a 0.2
RANGE x 0 6.283 t 0 6.283 dx -1 1
PERIODIC x 0 6.283 t 0 6.283
```

Die Variablen t und x werden dann als periodisch erkannt.

Benutze dann die Option **Poincare Section** im Menü **Orbits** und plotte beispielsweise immer Punkte bei $t = 0$. Bitte beachten, die Periodenanzahl (Parameter „Stop“ im Menü Orbits, Vorgabewert 5000) unbedingt auf etwa 100 zu verringen, oder sehr viel Zeit mitbringen!

Aufgabe Z12: [Arnol'd, Kapitel 3.16, Aufgabe 2] Anknüpfend an die vorangegangene Aufgabe wollen wir nun analytisch nachprüfen, dass die obere (im allgemeinen instabile) Gleichgewichtslage eines Pendels durch vertikale Schwingung des Aufhängepunktes stabilisiert werden kann.

Sei die Pendelarmlänge l. Die Anregung am Aufhängepunkt habe die Amplitude $a \ll l$ und die Periode 2τ, wobei zur Vereinfachung der Rechnung die Beschleunigung stückweise konstant $\pm c = \pm 8a/\tau^2$ sein soll. Die Bewegungsgleichung des Pendels kann dann auf die Gestalt

$$\ddot{x} = (\omega^2 \pm \alpha^2)x$$

mit $\omega^2 = g/l$, $\alpha^2 = c/l$ gebracht werden, wobei das Vorzeichen jeweils nach der Zeit τ wechselt. Für hinreichend schnelle Anregung ($\tau \ll 1$) ist $\alpha^2 = 8a/(l\tau^2) > \omega^2$.

Wie schnell muss die Anregung mindestens sein, damit das kopfstehende Pendel stabil wird?