

Übungen
Partielle Differentialgleichungen II
Jörg Härterich, Karsten Matthies
Abgabe: Mittwoch, den 21.4.2004, in der Vorlesung

Aufgabe 1: Definiere Sobolevräume H_{per}^k periodischer Funktionen in $\mathbb{R}$ mit Periode 2π für $k \in \mathbb{N}$. Charakterisiere sie mittels Fourierreihen. Wie hängen Sobolevräume periodischer Funktionen mit den Sobolevräumen $H^k((0, 2\pi))$ zusammen?

Hinweis: Die Fourierreihe zu $f \in L^2(0, 2\pi)$ konvergiert gleichmäßig, wenn $f' \in L^2(0, 2\pi)$ und zusätzlich $f(0) = f(2\pi)$.

Aufgabe 2: Sei $u \in H^1(\mathbb{R})$, zeige die Funktion $x \mapsto (u(x+h) - u(x))/h$ konvergiert für $h \rightarrow 0$ gegen u' im Sinne der L^2 -Konvergenz, d.h.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{u(\cdot + h) - u(\cdot)}{h} - u'(\cdot) \right\|_{L^2} = 0.$$

Hinweis: Zeige die Aussage erst für $u \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.

Aufgabe 3: Seien $u, v \in H^1(\mathbb{R})$. Zeige, dass das Produkt uv ebenfalls in $H^1(\mathbb{R})$ liegt.

Hinweis: Zeige zunächst für $u, v \in C_c^\infty(\mathbb{R})$

$$\|uv\|_{H^1} \leq C \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}.$$

Aufgabe 4: Faltung und Glättung in $\mathbb{R}$: Seien $k \in L^1(\mathbb{R})$ und $f \in L^p(\mathbb{R})$ mit $1 \leq p < \infty$.

a) Zeige für

$$(k * f)(x) = \int_{\mathbb{R}} k(x-y)f(y) \, dy = \int_{\mathbb{R}} k(y)f(x-y) \, dy$$

gilt

$$\|k * f\|_{L^p} \leq \|k\|_{L^1} \|f\|_{L^p}.$$

b) Sei $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ gegeben mit

$$\eta(x) = 0 \text{ für } |x| \geq 1, \quad \eta(x) \geq 0 \text{ für } x \in \mathbb{R}, \quad \int_{\mathbb{R}} \eta(x) \, dx = 1$$

Dann definiere $\eta_\epsilon(x) := \frac{1}{\epsilon} \eta(x/\epsilon)$ und

$$f_\epsilon = \eta_\epsilon * f.$$

Zeige $f_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$ und $f_\epsilon \rightarrow f$ in $L^p(\mathbb{R})$.