Übungen

Partielle Differentialgleichungen II

Jörg Härterich, Karsten Matthies

Abgabe: Mittwoch, den 28.4.2004, in der Vorlesung

Aufgabe 5: Sei X ein Banachraum. Ein linarer Operator $A : \mathcal{D}(A) \to X$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(A) \subseteq X$ heißt *abgeschlossen*, falls der Graph $\{(x, Ax); x \in \mathcal{D}(A)\}$ abgeschlossen in $X \times X$ ist.

Zeige: Falls A abgeschlossen ist mit $\mathcal{D}(A) = X$, dann ist A beschränkt, d.h. stetig.

Aufgabe 6: Sei X ein Banachraum und $A : X \to X$ eine lineare Abbildung. Zeige: Falls für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ die lineare Abbildung $(A - \lambda)^{-1}$ beschränkt ist, dann ist A abgeschlossen.

(Das bedeutet insbesondere, dass die Begriffe Spektrum und Resolventenmenge nur für abgeschlossene Operatoren sinnvoll sind.)

Aufgabe 7: Sei $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear. Definiere

$$T(t)u := \exp(tA)u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}$$

Zeige: $T(t)$ ist eine stark stetige Halbgruppe. Bestimme den infinitisimalen Erzeuger, d.h. berechne

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(T(t)u - u).$$

Aufgabe 8: Betrachte $X = L^2(0, 1)$ und definiere

$$(T(t)u)(x) = \begin{cases} u(x+t) & \text{für } x + t < 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für welche $\omega \in \mathbb{R}$ gibt es eine exponentielle Schranke der Form $\|T(t)\| \leq M_\omega e^{\omega t}$?