Übungen

Partielle Differentialgleichungen II

Jörg Härterich, Karsten Matthies

Abgabe: Mittwoch, den 05.05.2004, in der Vorlesung

Aufgabe 9: Sei X ein Banachraum und A der infinitesimale Generator einer stark stetigen Halbgruppe $T(t)$ auf X mit $\|T(t)\| \leq M$ für $t \geq 0$.

(i) Zeige die Identität

$$T(t)x - x = tAx + \int_0^t (t-s)T(s)A^2x\,ds \qquad \forall x \in \mathcal{D}(A^2)$$

(ii) Leite damit die Abschätzung

$$\|Ax\|^2 \leq 4M^2\|A^2x\| \cdot \|x\|$$

her.

(iii) Wende die Ungleichung aus (ii) auf die Shift-Halbgruppe $(T(t)f)(s) := f(t+s)$ auf dem Raum $X = BC^0_{unif}(\mathbb{R})$ an.

Aufgabe 10: Betrachte die Familie $T(t)$, $t \geq 0$, von linearen Operatoren, die einer Funktion $u \in L^2_{per}$ (siehe Übungsaufgabe 1) mit Fourier-Reihe $u = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ die Funktion

$$T(t)u = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-n^2t} c_n e^{inx}$$

zuordnet.

Zeige, dass die $T(t)$ eine stark stetige Halbgruppe auf L^2_{per} bilden, bestimme deren infinitesimalen Generator A sowie den Definitionsbereich $\mathcal{D}(A)$.

Aufgabe 11: Sei X ein Banachraum und $T(t)$ sei eine gleichmäßig beschränkte Halbgruppe, d.h. $\lim_{t\searrow 0} \|T(t) - Id\|_{\mathcal{L}(X)} = 0$. Zeige, dass der infinitesimale Generator A beschränkt ist, d.h. $A \in \mathcal{L}(X)$ und dass $\mathcal{D}(A) = X$.

Tipp: Benutze Aufgabe 5 sowie den Satz über die Neumann-Reihe, um zu zeigen, dass $\int_0^\rho T(s)\,ds$ für hinreichend kleines $\rho > 0$ invertierbar ist.

Aufgabe 12: Sei X ein Banachraum und $T(t)$, $t \geq 0$ eine stark stetige Halbgruppe mit infinitesimalem Erzeuger A.

Zeige: Falls λ ein Eigenwert von A mit zugehöriger Eigenfunktion u_λ ist, dann gilt:

$$T(t)u_\lambda = e^{\lambda t}u_\lambda \qquad \text{für alle } t \geq 0.$$