Übungen

Partielle Differentialgleichungen II

Jörg Härterich, Karsten Matthies

Abgabe: Mittwoch, den 12.05.2004, in der Vorlesung

Aufgabe 13: Betrachte auf $H = L^2(0,1)$ mal wieder $Au = \frac{du}{dx}$.

(i) Zeige, dass A mit Definitionsbereich $\mathcal{D}_1(A) = \{u \in H^1(0,1); u(1) = 0\}$ die Bedingungen des Satzes von Lumer-Phillips erfüllt.

(ii) Zeige, dass A jedoch mit dem Definitionsbereich $\mathcal{D}_2(A) = \{u \in H^1(0,1); u(0) = 0\}$ *keine* stark stetige Halbgruppe auf H erzeugt.

Aufgabe 14: Zeige: Falls sowohl A als auch $-A$ den Voraussetzungen des Satzes von Hille-Yosida genügt, dann ist

$$e^{(-A)t} = \left(e^{At}\right)^{-1}.$$

Setzt man daher $e^{At} := e^{(-A)(-t)}$ für $t < 0$, dann bilden die Operatoren $\{e^{At},\, t \in \mathbb{R}\}$ eine *stark stetige Gruppe.*

Aufgabe 15: Motiviert durch die Differentialgleichung

$$u_t = u_{xxx} + a(x)u_x, \quad x \in \mathbb{R},$$

mit $a \in BC^1(\mathbb{R})$ betrachten wir den linearen Operator $A : \mathcal{D}(A) \to H := L^2(\mathbb{R})$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(A) = H^3(\mathbb{R})$ und $Au = u_{xxx} + a(x)u_x$.

Zeige mit Hilfe des Satzes von Lumer-Phillips, dass A eine stark stetige Halbgruppe auf H erzeugt.

Tipp: der Operator A_0 mit $A_0 u = u_{xxx}$ und $\mathcal{D}(A_0) = \mathcal{D}(A)$ ist schief-adjungiert, d.h. $(Au, v) = -(u, Av)$ für alle $u, v \in \mathcal{D}(A)$ bzw. $A^* = -A$.

Aufgabe 16: Betrachte die hyperbolische Differentialgleichung

$$u_t = A(x)u_x, \quad x \in \mathbb{R},\ u \in \mathbb{R}^N$$

mit einer $N \times N$–Matrix A, die N verschiedene reelle Eigenwerte besitzt. Zeige, wie man die Gleichung in ein symmetrisches hyperbolisches System wie in Beispiel 2.20 transformieren kann.

Welche Probleme treten in höheren Raumdimensionen auf, d.h. für

$$u_t = \sum_{j=1}^{n} A_j(x) u_{x_j} \qquad ?$$