Übungen

Partielle Differentialgleichungen II

Jörg Härterich, Karsten Matthies

Abgabe: Mittwoch, den 19.05.2004, in der Vorlesung

Aufgabe 17: Schreibe die lineare Wellengleichung

$$v_{tt} = v_{xx}, \quad v \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}$$

um als symmetrisches hyperbolisches System für $u = (v_x, v_t, v)$.

Leite eine explizite Darstellung der Lösungs-Halbgruppe her, indem Du die auftretende Matrix diagonalisierst.

Hinweis: $A = \frac{d}{dx}$ ist der Erzeuger der Shift-Halbgruppe.

Aufgabe 18: Betrachte wie in Beispiel 2.21 die lineare Wellengleichung

$$v_{tt} + \alpha v_t = \sum_{j,k=1}^{n} b_{jk} v_{x_j x_k} + \sum_{j=1}^{n} c_j v_{x_j} + dv$$

mit $x \in \mathbb{R}^n$, v reell, b symmetrisch und gleichmäßig positiv definit sowie Koeffizienten $\alpha, c, d \in BC^0$, $b \in BC^1$.

Bestimme den infinitesimalen Generator der stark stetigen Halbgruppe für die (v, v_t) auf $H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$.

Aufgabe 19: Sei X ein Hilbertraum und $A : H \supset \mathcal{D}(A) \to H$ sei infinitesimaler Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe $T(t)$ auf H. Zeige:

(i) Die Familie $(T(t)^*)_{t \geq 0}$ der zu $T(t)$ adjungierten Operatoren bildet ebenfalls eine stark stetige Halbgruppe.

(ii) Der infinitesimale Erzeuger B dieser Halbgruppe $T(t)^*$ ist der zu A adjungierte Operator A^*.

Aufgabe 20: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Eine Funktion $u \in H_0^2(\Omega)$ heißt schwache Lösung von

$$\begin{aligned} -\Delta^2 u &= f \\ u = \partial_\nu u &= 0 \text{ auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

falls

$$\int_\Omega \Delta u \Delta v \, dx = \int_\Omega f \cdot v \, dx \quad \forall v \in H_0^2(\Omega).$$

Zeige, dass für $f \in L^2(\Omega)$ eine eindeutige schwache Lösung u existiert. Zeige weiter, dass für den Bi-Laplace-Operator $Au = -\Delta^2 u$ das Intervall $[0, \infty)$ zur Resolventenmenge von A gehört und beweise die Resolventenungleichung

$$\|(A - \lambda)^{-1}\| \leq \frac{M}{\lambda}$$

für alle $\lambda > 0$.