

Partielle Differentialgleichungen II

Jörg Härterich, Karsten Matthies

Abgabe: Mittwoch, den 26.05.2004, in der Vorlesung

Aufgabe 21: Wir wollen die lineare Wellengleichung

$$v_{tt} = \Delta v, \quad v \in \mathbb{R}, \quad x \in \Omega$$

in einem beschränkten, offenen Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit Dirichlet-Randbedingungen lösen.

Betrachte dazu auf dem Hilbertraum $H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ den linearen Operator $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}(v, w) = (w, \Delta v)$ und Definitionsbereich $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$.

Zeige, dass $\mathcal{A}$ eine stark stetige Halbgruppe auf H erzeugt.

Aufgabe 22: Sei H ein Hilbertraum und $A : H \supset \mathcal{D}(A) \rightarrow H$ ein maximal monotoner Operator. Zeige:

- (i) A ist dicht definiert
- (ii) Zu jedem $f \in H$ existiert genau ein $u \in H$ mit $u + Au = f$.
- (iii) $A + \text{Id}$ ist invertierbar und es gilt $\|(A + \text{Id})^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$.
- (iv) A ist ein abgeschlossener Operator.

Aufgabe 23: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes, beschränktes Gebiet und L wie in der Vorlesung ein gleichmäßig elliptischer Operator

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n (a^{ij} u_{x_i})_{x_j} + cu$$

mit reellen Koeffizienten $a^{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$ und $c \in L^\infty(\Omega)$.

Zeige, dass L mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(L) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ ein selbstadjungierter Operator auf $L^2(\Omega)$ ist, wenn die Matrix a symmetrisch ist, d.h. $a^{ij}(x) = a^{ji}(x)$.

Aufgabe 24: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes, beschränktes Gebiet und L wie in der Vorlesung ein gleichmäßig elliptischer Operator

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n (a^{ij} u_{x_i})_{x_j} + \sum_{j=1}^n b^j u_{x_j} + cu$$

Zeige: Wenn $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ eine schwache Lösung der elliptischen Gleichung $Lu = f$ in $H^1(\Omega)$ ist, d.h. wenn

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{j=1}^n b^j u_{x_j} v + cuv \right) dx = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

dann erfüllt u die Differentialgleichung $Lu = f$ in jedem Punkt $x \in \Omega$ mit echten Ableitungen und genügt einer Neumann-Randbedingung, d.h. $nu^T a \nabla u(x) = 0$ für alle $x \in \partial\Omega$.

Tipp: Geeignete Testfunktionen v finden.