Übungen

Partielle Differentialgleichungen II

Jörg Härterich, Karsten Matthies

Abgabe: Mittwoch, den 9.06.2004, in der Vorlesung

Aufgabe 25: Sei A sektoriell. Zeige $R(e^{At}) \subset \mathcal{D}(A^m)$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und $t > 0$. Folgere daraus, dass $\mathcal{D}(A^m)$ in X dicht ist für alle $m \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 26: Sei A ein sektorieller Operator mit kompakter Resolvente A^{-1}. Zeige, dass die analytische Halbgruppe e^{At} kompakt ist für alle $t > 0$.

Aufgabe 27: Für $u \in C^2([0,1])$ und $v, w \in \mathbb{R}$ definiere $A(u,v,w) = (u_{xx}, 0, 0)$ mit Randwerten $u_x(0) = v$ und $u_x(1) + u(1) = w$. Erweitere A zu einem abgeschlossenen Operator auf $L^2(0,1) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und zeige A sektoriell.

Tipp: [Henry, §1.3, exercise 7]

Aufgabe 28: Zeige die Existenz einer Lösung für die Diffusionsgleichung mit veränderlichen Randdaten:

$$\begin{aligned}
u_t(t,x) &= u_{xx}(t,x), \quad 0 < x < 1, t > 0 \\
&\quad \text{mit Randwerten: } u_x(t,0) = v(t); \quad u_x(t,1) + u(t,1) = w(t) \\
\dot{w}(t) &= \alpha v(t) + \beta w(t) \\
\dot{v}(t) &= \gamma v(t) + \delta w(t) + \int_0^1 u(t,x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Mit gegebenen Anfangsdaten $u(0,.) \in L^2(0,1)$ sowie $v(0), w(0) \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 29: Gib einen nicht-sektoriellen Operator A an, der eine stark stetige Halbgruppe erzeugt.

Aufgabe 30: Es erzeuge A (mit Konstanten $M > 0$, $\omega = 0$) eine stark stetige Halbgruppe auf X. Es gelte zusätzlich $||AT(t)|| \leq \frac{M}{t}$ $\forall t \in (0,1]$. Zeige, dass

(i) für alle $t \in (0,1]$ und $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\|(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})^m T(t)\| = \|A^m T(t)\| \leq \left(\frac{M}{\frac{t}{m}}\right)^m;$$

(ii) $T(t)$, $t \geq 0$, eine analytische Halbgruppe ist.