Übungen

Partielle Differentialgleichungen II

Jörg Härterich, Karsten Matthies

Abgabe: Mittwoch, den 16.06.2004, in der Vorlesung

Aufgabe 31: Sei A infinitesimaler Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe auf einem Banachraum X. Wir betrachten die inhomogene Gleichung

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} &= Au + h(t), \qquad t > 0 \\ u(0) &= u_0 \end{cases}$$

mit $h \in C^0([0,\bar{t}], X)$ und $Ah \in C^0([0,\bar{t}], X)$. Zeige, dass für $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ die milde Lösung auf $[0,\bar{t}]$ eine (klassische) Lösung ist.

Aufgabe 32: Ein Elektron, das sich in einem elektrischen Feld mit dem elektrostatischen Potential $V = V(x)$ im Raum bewegt, wird durch die Schrödingergleichung

$$\begin{cases} i\dfrac{d\Psi}{dt} &= \Delta\Psi + V(x)\Psi, \qquad x \in \mathbb{R}^3 \\ \Psi(0,x) &= \Psi_0(x) \end{cases}$$

beschrieben. Gesucht ist eine Lösung in $X = L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ für Anfangsdaten $\Psi_0 \in H^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$. Zeige mit Hilfe der Störungssätze, dass eine eindeutige Lösung existiert, falls
(i) $V \in L^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$, (ii) $V \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$.

Bemerkung: Fall (ii) erlaubt im Gegensatz zu (i) auch unbeschränkte Potentiale.

Aufgabe 33: Sei $A \in \mathcal{H}(M, 0, \theta)$ sektorieller Operator mit Re $\sigma(A) < 0$. Zeige:

(i) Für $\alpha, \beta > 0$ gilt $(-A)^{-\alpha}(-A)^{-\beta} = (-A)^{-(\alpha+\beta)}$

(ii) Für $\alpha \geq \beta > 0$ ist $\mathcal{D}((-A)^\alpha) \subseteq \mathcal{D}((-A)^\beta)$

(iii) $(-A)^\alpha(-A)^\beta u = (-A)^{\alpha+\beta} u$ für $u \in \mathcal{D}((-A)^\gamma)$ mit $\gamma = \max\{\alpha, \beta, \alpha+\beta\}$.

Aufgabe 34: Sei $A \in \mathcal{H}(M, 0, \theta)$ sektorieller Operator mit Re $\sigma(A) < 0$ und $\alpha > 0$. Zeige, dass $(-A)^\alpha$ dicht definiert und abgeschlossen ist und folgere, dass X^α tatsächlich ein Banachraum ist.