Übungen

Partielle Differentialgleichungen II

Jörg Härterich, Karsten Matthies

Abgabe: Mittwoch, den 23.06.2004, in der Vorlesung

Aufgabe 35: Störungssatz für sektorielle Operatoren
Sei $A \in \mathcal{H}(M, \omega, \theta)$ ein sektorieller Operator und B ein abgeschlossener linearer Operator mit $\mathcal{D}(B) \supset \mathcal{D}(A)$, so dass für alle $u \in \mathcal{D}(A)$ die Abschätzung

$$\|Bu\| \leq a\|Au\| + b\|u\|$$

gilt mit nichtnegativen Konstanten $a, b \geq 0$.
Zeige: Es existiert ein $\delta > 0$, so dass $A + B$ infinitesimaler Erzeuger einer analytischen Halbgruppe ist, wenn $0 \leq a \leq \delta$ gilt.

Tipp: Betrachte zunächst $A \in \mathcal{H}(M, 0, \theta)$ und schätze die Operator-Norm von $B(A-\lambda)^{-1}$ ab. Neumann-Reihe !

Freiwillig: Gib unbeschränkte Operatoren A und B an, die die obige Abschätzung erfüllen.

Aufgabe 36: Sei $A \in \mathcal{H}(M, 0, \theta)$ ein sektorieller Operator und $0 < \alpha < 1$.

(i) Beweise die Integraldarstellung

$$(-A)^{-\alpha} = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^\infty t^{-\alpha}(t - A)^{-1}\, dt.$$

(ii) Zeige: Es existiert eine Konstante $C > 0$, so dass für $u \in \mathcal{D}(A)$ und $\varrho > 0$ beliebig gilt:

$$\|A^\alpha u\| \leq C\left(\varrho^\alpha \|u\| + \varrho^{\alpha-1}\|Au\|\right)$$

(iii) Zeige die Interpolationsungleichung

$$\|A^\alpha u\| \leq 2C\|u\|^{1-\alpha}\|Au\|^\alpha$$

Tipp: $\int\limits_0^\infty v^{-\alpha}e^{-v}\, dv = \dfrac{\pi}{\sin(\pi\alpha)\Gamma(\alpha)}$

Aufgabe 37: Sei A der infinitesimale Erzeuger einer analytischen Halbgruppe $T(t)$ und $h \in C^{0,\eta}([0, \bar{t}], X)$ sei Hölder–stetig für ein $\eta \in (0, 1)$. Sei weiter u die (klassische) Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au + h(t), & 0 < t \leq \bar{t} \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Für beliebig kleines $\delta > 0$ sind auch Au, $du/dt \in C^{0,\eta}([\delta, \bar{t}], X)$ Hölder–stetig.

Aufgabe 38: Betrachte die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}u = Au(t) + h(t)$$

auf einem Banachraum X, wobei $A \in G(M, \omega)$ mit $\omega < 0$ und $h \in C^0([0, \infty), X)$ stetig ist mit $\lim\limits_{t\to\infty} h(t) = h_\infty$.

Zeige, dass für die milde Lösung $u(t)$ der Grenzwert $u_\infty = \lim\limits_{t\to\infty} u(t)$ existiert.

Welcher Gleichung genügt u_∞ ?