Übungen

Partielle Differentialgleichungen II

Jörg Härterich, Karsten Matthies

Abgabe: Mittwoch, den 30.06.2004, in der Vorlesung

Aufgabe 39: Sei A infinitesimaler Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe $T(t)$ auf einem Banachraum X. Weiter sei $f : [0, \bar{t}] \times X \to X$ stetig in t sowie gleichmäßig Lipschitz-stetig in u bezüglich $t \in [0, \bar{t}]$.

Zeige, dass das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} &= Au + f(t,u), \qquad 0 < t \leq \bar{t} \\ u(0) &= u_0 \end{cases}$$

für $u_0 \in X$ eine eindeutige milde Lösung besitzt.

Aufgabe 40: Sine–Gordon–Gleichung

Betrachte die Gleichung

$$v_{tt} = v_{xx} + \sin v, \qquad x \in \mathbb{R},\ v \in \mathbb{R}$$

mit $v(0) = v_0$ und $v_t(0) = v_1$.

Zeige:

(i) Es existiert eine lokale milde Lösung, falls $(v_0, v_1) \in H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$.

(ii) Es existiert eine lokale klassische Lösung, falls $(v_0, v_1) \in H^2(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$.

Tipp: Beispiel 2.21 bzw. Aufgabe 17; H^1 bettet nach L^4 ein

Aufgabe 41: Berechne $(-A)^\alpha$ für eine $n \times n$ Matrix, d.h. insbesondere für Jordanblöcke

Aufgabe 42: Sei u eine milde Lösung der semilinearen Gleichung

$$\frac{du}{dt} = Au + f(t,u),$$

wobei A infinitesimaler Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe und f stetig in t sowie gleichmäßig Lipschitz-stetig in u ist.

Zeige:

(i) Entweder existiert u für alle Zeiten $t > 0$ oder es gibt eine Zeit $T > 0$ mit $\lim_{t \nearrow T} \|u(t)\| = \infty$.

(ii) Falls f der Abschätzung

$$\|f(t,u)\| \leq a + b\|u\|$$

mit von t unabhängigen Konstanten $a, b > 0$ genügt, dann existiert die milde Lösung zum Anfangswert u_0 für alle Zeiten.

Achtung ! Die Vorlesungen am 12. und 14. Juli fallen aus und werden am Freitag, 16. Juli ab 14.00 Uhr in Raum 009 nachgeholt.