Übungen

Partielle Differentialgleichungen II

Jörg Härterich, Karsten Matthies

Abgabe: Mittwoch, den 7.07.2004, in der Vorlesung

Aufgabe 43: Sei $X = L^2_{per}$ der Hilbertraum der periodischen Funktionen in $\mathbb{R}$ mit Periode 1 (siehe Aufgabe 1). Durch $Au = \frac{d^2u}{dx^2}$ ist auf $X = L^2_{per}$ ein sektoriellen Operator mit $\mathcal{D}(A) = H^2_{per}$ gegeben. Gebrochene Potenzen von $-A$ lassen sich durch

$$(-A)^{-\alpha}u = \sum(-\lambda_k)^{-\alpha}\langle v_k, u\rangle v_k$$

erklären, wobei λ_k und v_k die Eigenwerte und Eigenvektoren von A sind. Zeige, dass $\mathcal{D}((-A)^{1/2}) = H^1_{per}([0,1])$. Gilt auch $(-A)^{1/2}u = \frac{d}{dx}u$?

Aufgabe 44: Wir wollen wie in Beispiel 6.8 die Gleichung

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(u, u_x), \quad 0 < x < 1 \\
& u(t,0) = u(t,1), u_x(t,0) = u_x(t,1), \quad t \geq 0 \\
u(0,x) &= u_0(x).
\end{aligned}$$

lösen aber mit $u_0 \in X^{1/2} = H^1_{per}([0,1])$. Erklären dann die folgenden g Lipschitz stetige Abbildungen $X^{1/2} \to X$?

(i) $g(u, u_x) = u^3 u_x$

(ii) $g(u, u_x) = u_x^2$

Aufgabe 45: Betrachte die Reaktions-Diffusions-Gleichung

$$u_t = \Delta u + \lambda u^3, \qquad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3,\ u \in \mathbb{R}$$

mit $u(0) = u_0$ und Dirichlet Randbedingung $u = 0$. Dabei sei Ω ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand.

Zeige:

(i) Solange eine klassische Lösung existiert, ist die Funktion $t \mapsto \int_\Omega |u(t,x)|^6\, dx$ monoton fallend.

(ii) In X^α mit $\frac{3}{4} < \alpha < 1$ existiert eine klassische Lösung für alle Zeiten $t > 0$ und ist beschränkt in X^α, d.h. es gibt eine Konstante $C = C(u_0)$ so dass

$$\|u(t,\cdot)\|_{X^\alpha} \leq C \qquad \text{für alle } t > 0.$$

Tipp: $(-A)^\alpha$ auf die Variation der Konstantenformel anwenden und die L^2-Norm geeignet abschätzen.

Aufgabe 46: Betrachte für Hölderstetige $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u), \quad 0 < x < 1 \\ & \quad u(t,0) = u(t,1), u_x(t,0) = u_x(t,1), \quad t \geq 0 \\ u(0,x) &= u_0(x). \end{aligned}$$

Zeige für jedes $u_0 \in X = C^0_{per}([0,1]) = \{u \in C^0([0,1]) | u(0) = u(1)\}$ existiert eine klassische lokale Lösung.

Tipp: Vergleiche Pazy §8.2: Zeige zuerst, dass $Au = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ eine analytische Halbgruppe auf X definiert. Finde dann milde Lösungen und erkenne diese dann als klassische.