(Ausführliche) Lösung zu Aufgabe 19

Sei X ein Hilbertraum und $A : H \supset \mathcal{D}(A) \to H$ sei infinitesimaler Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe $T(t)$ auf H.
Zeige:

(i) Die Familie $(T(t)^*)_{t\geq 0}$ der zu $T(t)$ adjungierten Operatoren bildet ebenfalls eine stark stetige Halbgruppe.

(ii) Der infinitesimale Erzeuger B dieser Halbgruppe $T(t)^*$ ist der zu A adjungierte Operator A^*.

Lösung:
(i) Zunächst ist für beliebige $u, v \in H$

$$(T(t+s)^*u, v) = (u, T(t+s)v) = (u, T(s)T(t)v) = (T(s)^*u, T(t)v) = (T(t)^*T(s)^*u, v)$$

und

$$(T(0)^*u, v) = (u, T(0)v) = (u, v)\,.$$

Analog zeigt man noch

$$\lim_{t\searrow 0}(T(t)^*u, v) = \lim_{t\searrow 0}(u, T(t)v) = (u, v)$$

aber das bedeutet zunächst leider nur, dass $T(t)^*u$ schwach gegen u konvergiert.
Betrachte nun

$$\mathcal{F} := \{v \in H;\ \lim_{h\searrow 0} T^*(h)v = v\},$$

also den Unterraum, auf dem $T^*(t)$ stark stetig ist. Wir müssen zeigen, dass $\mathcal{F} = H$. Da $\mathcal{F}$ abgeschlossen ist, genügt es nachzuweisen, dass $\mathcal{F}$ dicht in H ist.
Nun schätzt man ab:

$$\begin{aligned}
\left|\left(u, T^*(h)\frac{1}{t}\int_0^t T^*(s)v\,ds - \frac{1}{t}\int_0^t T^*(s)v\,ds\right)\right| &= \left|\frac{1}{t}\left(u, \int_0^t T^*(h)T^*(s)v\,ds\right) - \frac{1}{t}\left(u, \int_0^t T^*(s)v\,ds\right)\right| \\
&= \frac{1}{t}\left|\int_h^{t+h}(u, T^*(s)v\,ds) - \int_0^t (u, T^*(s)v\,ds)\right| \\
&\leq \frac{1}{t}\left(\int_h^{t+h}\|u\|\|T^*(s)\|\|v\|\,ds + \int_0^t \|u\|\|T^*(s)\|\|v\|\,ds\right) \\
&\leq \frac{\|u\|\|v\|}{t}\left(\int_h^{t+h} Me^{\omega s}\,ds + \int_0^t Me^{\omega s}\,ds\right) \\
&\leq \frac{M\|u\|\|v\|}{t\omega}\left(e^{\omega(t+h)} - e^{\omega t} + e^{\omega h} - 1\right) \\
&= M\|u\|\|v\|\omega^{-1}\frac{1}{t}\left(e^{\omega t} - 1\right)\left(e^{\omega h} - 1\right)
\end{aligned}$$

Daraus folgt nun (durch geeignete Wahl von u)

$$\|T^*(h)\frac{1}{t}\int_0^t T^*(s)v\,ds - \frac{1}{t}\int_0^t T^*(s)v\| \to 0$$

für $h \searrow 0$. Also gilt $\frac{1}{t}\int_0^t T^*(s)v\,ds \in \mathcal{F}$ für beliebige $t > 0$ und $v \in H$. Da $\frac{1}{t}\int_0^t T^*(s)v\,ds$ schwach gegen v konvergiert und konvexe, abgeschlossene Mengen schwach abgeschlossen sind (siehe [Alt: Lineare Funktionalanalysis, Satz 5.10]), ist $\mathcal{F}$ tatsächlich dicht und wir sind fertig.

(ii) Sei B der Erzeuger der Halbgruppe $T(t)^*$. Dann gilt für $u \in \mathcal{D}(A)$ und $v \in \mathcal{D}(B)$:

$$(Au, v) = \lim_{t \searrow 0} \left(\frac{T(t)u - u}{t}, v \right) = \lim_{t \searrow 0} \left(u, \frac{T(t)^* v - v}{t} \right) = (u, Bv)\,,$$

d.h. B ist adjungiert zu A. Automatisch gilt dann $B \subseteq A^*$, d.h. $\mathcal{D}(B) \subseteq \mathcal{D}(A^*)$.
Wir zeigen noch die umgekehrte Inklusion. Sei dazu $w \in \mathcal{D}(A^*)$. Dann gilt für alle $u \in \mathcal{D}(A)$:

$$(u, T(t)^* w - w) = (T(t)u - u, w) = \left(\int_0^t AT(s)u \, ds, w \right) = \int_0^t (AT(s)u, w) \; ds = \int_0^t (u, T(s)^* A^* w) \; ds$$

Daraus folgt dann

$$\frac{T(t)^* w - w}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t T(s)^* A^* w \, ds \to A^* w \;\text{ für } t \searrow 0.$$

Insbesondere ist dann $w \in \mathcal{D}(B)$ und $A^* w = Bw$.