Vorlesung “Dynamische Systeme II” (Freie Universität Berlin, Wintersemester 2004/05)

Jörg Härterich
Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik I
Arnimallee 2-6, 14195 Berlin
haerter@math.fu-berlin.de

22. Oktober 2004

1 Einleitung: Flüsse und Diffeomorphismen

1.1 Dynamische Systeme

In diesem Kapitel werden wir einige Grundbegriffe bereitstellen. Zum Teil handelt es sich um eine Wiederholung der Vorlesung “Einführung in die Dynamischen Systeme” vom Sommersemester.

Definition: Ein **dynamisches System** besteht aus einer Menge X, dem sogenannten **Phasenraum**, einer Gruppe $G = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{Z}$, und einer Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi : G \times X &\to X \\ (t,x) &\mapsto \Phi(t,x) =: \Phi_t(x), \end{aligned}$$

mit

(i) $\Phi(0,x) = x$ für alle $x \in X$ und

(ii) $\Phi_t \circ \Phi_s(x) = \Phi(t, \Phi(s,x)) = \Phi(t+s,x) = \Phi_{t+s}(x)$ für alle $s,t \in G$ und alle $x \in X$.

(ii) Für festes t ist die Abbildung $x \mapsto \Phi(t,x)$ stetig.

Im Fall $G = \mathbb{R}$ spricht man von einem **kontinuierlichen dynamischen System** und nennt Φ_t den **(Phasen-)Fluss**.
Für $G = \mathbb{Z}$ nennt man das Ganze ein **diskretes dynamisches System**.

Wegen

$$\Phi_m = \underbrace{\Phi_1 \circ \Phi_1 \circ \ldots \circ \Phi_1}_{m-\text{mal}} =: \Phi_1^m$$

für $m \in \mathbb{N}$ ist ein diskretes dynamisches System durch eine einzige Abbildung Φ_1 festgelegt.
Falls Φ_1 invertierbar ist, dann gilt außerdem

$$\Phi_{-m} = (\Phi_m)^{-1} = (\Phi_1)^{-m}.$$

Wir interpretieren $t \in G$ immer als "Zeit", d.h. $t > 0$ entspricht der Zukunft, negative t beschreiben die Vergangenheit. Φ beschreibt, wie sich das dynamische System im Lauf der Zeit verändert.
Gelegentlich werden wir auch Abbildungen Φ betrachten, die nicht invertierbar sind. Dann ist $G = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ nur eine **Halbgruppe**.
Der Phasenraum X ist im allgemeinen mindestens ein metrischer Raum. Die Abbildung Φ sollte dann bezüglich der Metrik zumindest stetig sein.
Fast immer wird X jedoch eine (Riemannsche) Mannigfaltigkeit sein, z.B. $\mathbb{R}^n$, das Intervall $[0, 1]$, die Kreislinie S^1, die Kugeloberfläche S^2 oder der Torus $\mathbb{T}^2$.
Meistens verlangt man von Φ auch noch gewisse Differenzierbarkeitseigenschaften, diese werden wir dann jeweils an Ort und Stelle spezifizieren.

Definition: Die Menge

$$\gamma(x_0) := \{\Phi_t(x_0);\ t \in G\} \subseteq X$$

heißt **Orbit** von x_0 (oder **Trajektorie** von x_0).
Lassen wir nur positive t zu, dann erhalten wir den **Vorwärtsorbit**

$$\gamma_+(x_0) := \{\Phi_t(x_0);\ t \in G \cap \mathbb{R}^+\}.$$

Analog heißt

$$\gamma_-(x_0) := \{\Phi_t(x_0);\ t \in G \cap \mathbb{R}^-\}$$

der **Rückwärtsorbit** von x_0.

1.2 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Kontinuierliche dynamische Systeme werden oft von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\dot{x} = f(t, x), \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

erzeugt. In diesem Fall ist $\Phi_t(x_0)$ die Lösung zur Zeit t der Differentialgleichung mit Anfangswert $x(0) = x_0$. Dass diese Lösung im allgemeinen, zumindest für $|t|$ klein genug, existiert und eindeutig ist, besagt der **Satz von Picard–Lindelöf**:

Satz 1.1 (Lokale Existenz und Eindeutigkeit) *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ in einer Umgebung von x_0 gleichmäßig Lipschitz-stetig. Dann existiert ein $\delta > 0$, so dass das Anfangswertproblem*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

für $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ eine eindeutige Lösung $x(t)$ hat.

Bemerkung: Ein analoger Satz gilt für nicht-autonome Differentialgleichungen

$$\dot{x} = f(t, x)$$

unter der Voraussetzung, dass f stetig in t und lokal Lipschitz-stetig in x ist.

Falls f sogar stetig differenzierbar ist und $\|f(x)\| \leq M|x|$ für eine Konstante M und alle $x \in X$, dann kann man die Lösung immer weiter fortsetzen und die Differentialgleichung erzeugt einen Fluss Φ. Dieser Fluss ist dann so glatt wie das Vektorfeld f.
Der Zusammenhang zwischen Flüssen und Differentialgleichungen fassen wir in einem Satz zusammen:

Satz 1.2 (Fluss und Vektorfeld) *(i) Sei Φ ein stetig differenzierbarer Fluss auf X und $x_0 \in X$. Dann ist der Orbit $x(t) = \Phi_t(x_0)$ eine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung*

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

mit Anfangsbedingung $x(0) = x_0$ zum Vektorfeld

$$f(x) := \frac{\partial}{\partial t}\,\Phi(t, x)\big|_{t=0}\,.$$

(ii) Sei $f \in BC^k(X, X)$ ein Vektorfeld. Dann existiert die Lösung $x(t; x_0)$ des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0$$

für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$ und durch $\Phi_t(x_0) := x(t; x_0)$ wird ein Fluss $\Phi \in C^k(\mathbb{R} \times X, X)$ definiert.

1.3 Grundbegriffe der Dynamik

Definition: Sei Φ ein kontinuierliches dynamisches System auf dem Phasenraum X.

(i) Ein Punkt x_0 heißt **Ruhelage** (oder **Gleichgewicht** oder **stationärer Punkt**), falls $\gamma(x_0) := \{x_0\}$, d.h. falls $\Phi_t(x_0) = x_0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(ii) Ein Punkt x_0 heißt **periodischer Punkt** mit (minimaler) Periode $p > 0$, falls $\Phi_p(x_0) = x_0$ und $\Phi_p(x_0) \neq x_0$ für alle $t \in (0, p)$. Der zugehörige Orbit heißt **periodischer Orbit**.

(iii) Ein Orbit $\gamma(x_0)$ heißt **heterokliner Orbit**, falls es zwei Gleichgewichte x_- und x_+ gibt, so dass

$$\lim_{t\to-\infty} \Phi_t(x_0) = x_- \text{ und } \lim_{t\to+\infty} \Phi_t(x_0) = x_+.$$

Falls $x_- = x_+$, dann sprechen wir von einem **homoklinen Orbit**.

Analoge Definitionen gelten für diskrete dynamische Systeme, allerdings heißen hier Punkte mit $\gamma(x_0) := \{x_0\}$ **Fixpunkte**.

Von besonderem Interesse sind immer Teilmengen von X, die ein dynamisches System in sich selbst abbildet.

Definition: Sei Φ ein kontinuierliches dynamisches System auf dem Phasenraum X. Eine Menge $M \subseteq X$ heißt **positiv invariant**, falls $\Phi_t(M) \subseteq M$ für alle $t \geq 0$. Analog heißt M **negativ invariant**, falls $\Phi_t(M) \subseteq M$ für alle $t \leq 0$. Falls $\Phi_t(M) \subseteq M$ für alle $t \in \mathbb{R}$, dann nennen wir die Menge **invariant**. Ganz analog definiert man (positive, negative) Invarianz für diskrete dynamische Systeme.

Gelegentlich ist es sehr nützlich, wenn man verschiedene dynamische Systeme miteinander vergleichen kann. Man betrachtet zwei Systeme als äquivalent, wenn es eine bijektive Abbildung zwischen ihnen gibt, die mit der Dynamik verträglich ist.

Definition: Zwei dynamische Systeme Φ auf X und $\tilde{\Phi}$ auf $\tilde{X}$ heißen **C^k-konjugiert** (oder auch **C^k-äquivalent**), falls es einen C^k-Diffeomorphismus $\Psi : X \to \tilde{X}$ gibt, so dass

$$\tilde{\Phi}_t = \Psi \circ \Phi_t \circ \Psi^{-1} \qquad \forall t \in G.$$

Im Fall $k = 0$ ist Ψ ein Homöomorphismus und man nennt die Flüsse bzw. Diffeomorphismen **topologisch konjugiert** zueinander.

Bemerkung: Bei diskreten dynamischen Systemen reicht es aus, eine Abbildung Ψ zu finden, für die

$$\tilde{\Phi} = \Psi \circ \Phi \circ \Psi^{-1}$$

gilt.

1.4 Asymptotisches Verhalten, Stabilität und Rekurrenz

Definition: Sei Φ_t ein Fluss auf einem metrischen Raum X und $M \subseteq X$ eine nichtleere, kompakte, invariante Menge. M heißt **Lyapunov-stabil** oder einfach **stabil**, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass gilt:

$$\operatorname{dist}(x_0, M) < \delta \Rightarrow \operatorname{dist}(\Phi_t(x_0), M) < \varepsilon \qquad \forall t \geq 0.$$

Die Menge M heißt **asymptotisch stabil**, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass für alle x_0 mit $\operatorname{dist}(x_0, M) < \varepsilon$ gilt:

$$\lim_{t \to \infty} \operatorname{dist}(\Phi_t(x), M) = 0.$$

Für Ruhelagen liefert die Linearisierung ein oftmals brauchbares Kriterium, um über die Frage der Stabilität zu entscheiden:

Satz 1.3 (Prinzip der linearisierten Stabilität) *Betrachte die autonome Differentialgleichung*

$$(*) \qquad \dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Dabei sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $f(0) = 0$. Dann gilt: Ist die Ruhelage $x = 0$ asymptotisch stabil für die linearisierte Gleichung

$$\dot{x} = Df(0)x,$$

so ist $x = 0$ auch asymptotisch stabil für $(*)$. Dies ist genau dann der Fall, wenn alle Eigenwerte der Jacobi-Matrix $Df(0)$ in der linken komplexen Halbebene $\{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}\, z < 0\}$ liegen.

Der analoge Satz für diskrete dynamische Systeme lautet:

Satz 1.4 (Linearisierten Stabilität, diskret) *Betrachte das diskrete dynamische System*

$$(*) \qquad x_{n+1} = f(x_n), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

mit stetig differenzierbarem $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $f(0) = 0$.
Dann gilt: Ist der Fixpunkt $x = 0$ asymptotisch stabil für die linearisierte Gleichung

$$x_{n+1} = Df(0)x_n,$$

so ist $x = 0$ auch asymptotisch stabil für $(*)$. Dies ist genau dann der Fall, wenn alle Eigenwerte der Jacobi-Matrix $Df(0)$ im Innern des komplexen Einheitskreises $\{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\}$ liegen.

Sehr wichtig für die Beschreibung der Langzeit-Dynamik ist die Menge der Häufungspunkte des Vorwärtsorbits, d.h. die Menge jener Punkte in deren Umgebung die Trajektorie immer wieder kommt.

Definition: Wir nennen

$$\omega(x_0) := \{y \in X,\ \exists t_n \nearrow +\infty, y = \lim_{n\to\infty} \Phi_{t_n}(x_0)\} = \bigcap_{t\geq 0} \overline{\gamma_+(\Phi_t(x_0))}$$

die ω**-Limesmenge** von x_0. Ganz analog nennen wir

$$\alpha(x_0) := \{y \in X,\ \exists t_n \searrow -\infty, y = \lim_{n\to\infty} \Phi_{t_n}(x_0)\} = \bigcap_{t\leq 0} \overline{\gamma_-(\Phi_t(x_0))}$$

die α**-Limesmenge** von x_0. Hierbei bezeichnet $\overline{M}$ den Abschluss einer Menge M.

Es spielt dabei keine Rolle, ob es sich um ein diskretes ($t \in \mathbb{Z}$) oder ein kontinuierliches dynamisches System ($t \in \mathbb{R}$) handelt.
Die wichtigsten Eigenschaften der ω–Limesmenge:

Satz 1.5 *Sei der Vorwärtsorbit $\gamma_+(x_0)$ beschränkt. Dann ist $\omega(x_0)$*

(i) nichtleer,

(ii) kompakt und

(iii) invariant.

(iv) Bei kontinuierliche dynamischen Systemen ist $\omega(x)$ außerdem zusammenhängend.

Dasselbe gilt für $\alpha(x_0)$, falls der Rückwärtsorbit $\gamma_-(x_0)$ beschränkt ist.

Für Flüsse im $\mathbb{R}^2$ kann man die möglichen ω-Limesmengen recht genau beschreiben.

Satz 1.6 (Satz von Poincaré-Bendixson) *Sei $\gamma_+(x_0)$ beschränkt. Dann gilt die folgende Alternative: Entweder ist*
(i) $\omega(x_0)$ ein periodischer Orbit oder
(ii) für jedes $y \in \omega(x_0)$ bestehen $\alpha(y)$ und $\omega(y)$ nur aus Gleichgewichten.

Insbesondere besagt dieser Satz, dass man "Chaos" bei Flüssen erst ab der Raumdimension 3 erwarten kann. Tatsächlich findet man im $\mathbb{R}^3$ schon viele Beispiele, die eine sehr komplizierte Dynamik haben.

1.5 Die Poincaré–Abbildung

In der Nähe eines p-periodischen Orbits γ kann man die Untersuchung eines Flusses durch die folgende Konstruktion etwas vereinfachen. Betrachte einen beliebigen Punkt x_0 auf dem periodischen Orbit. Dort ist dann $f(x_0) \neq 0$. Wähle eine Hyperebene Σ, die transversal zu $f(x_0)$ ist, beispielsweise kann man das orthogonale Komplement

$$\Sigma = \langle f(x_0) \rangle^{\perp}.$$

Mit dem Satz über implizite Funktionen kann man zeigen, dass die Zeit, die eine Trajektorie vom Punkt $x_0 + \xi \in \Sigma$ braucht, um nach Σ zurückzukehren eine differenzierbare Funktion von ξ ist. In der Tat ist

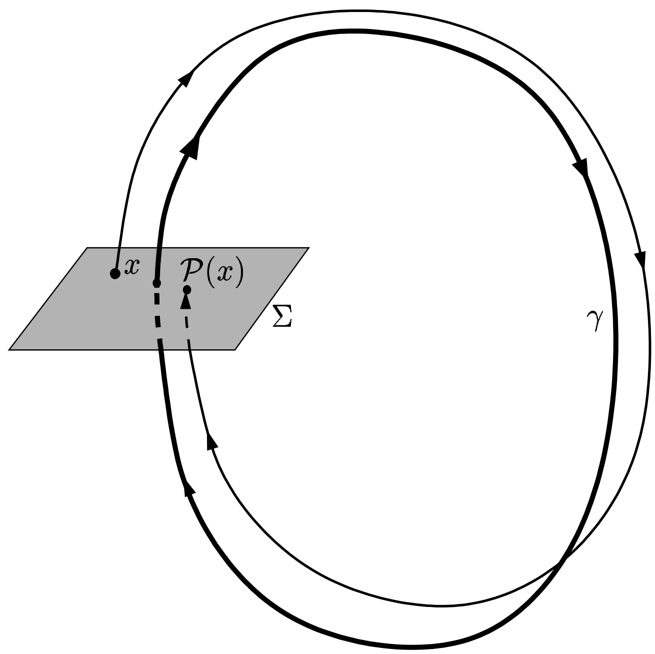
$$\Phi_t(x_0 + \xi) \in \Sigma \Longleftrightarrow F(t, \xi) = \langle f(x_0), \Phi_t(x_0 + \xi) - x_0 \rangle = 0.$$

Es ist $F(p, 0) = 0$ wobei p die Periode des Orbits durch x_0 ist. Da

$$D_t F(p, 0) = \langle f(x_0), f(\Phi_p(x_0)) \rangle = \langle f(x_0), f(x_0) \rangle \neq 0,$$

besitzt die Gleichung $F(t, \xi) = 0$ lokal eine eindeutige Lösung $t = t_*(\xi)$ und diese Lösung ist so glatt wie der Fluss Φ_t bzw. das Vektorfeld f.
Die **Poincaré–Abbildung** $\mathcal{P}$ ordnet jedem Punkt x aus einer Umgebung von p in Σ seinen nächsten Schnittpunkt mit Σ zu:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P} : \Sigma & \to & \Sigma \\ x & \mapsto & \Phi_{t_*(x)}(x) \end{array}$$



Von einem Fluss in n Raumdimensionen gelangt man auf diese Weise zu einer Abbildung in $n-1$ Raumdimensionen. Nach dem oben Gesagten ist $\mathcal{P}$ so glatt wie der Fluss Φ_t, bzw. das zugeförige Vektorfeld f.
Die Poincaré-Abbildung sagt auch etwas über die Stabilität des periodischen Orbits durch x_0 aus: Falls alle Eigenwerte der Jacobi-Matrix $D\mathcal{P}(0)$ vom Betrag kleiner als 1 sind, dann ist der periodische Orbit asymptotisch stabil. Falls ein Eigenwert mit Betrag größer als 1 existiert, dann ist der periodische Orbit instabil.
Die Eigenwerte von $D\mathcal{P}(0)$ hängen eng mit den Floquet-Multiplikatoren der Linearisierung

$$\dot{z} = Df(\gamma(t))z(t)$$

längs des p-periodischen Orbits γ zusammen. Sei $Z(t)$ die Fundamentallösung , d.h. die Lösung der p-periodischen linearen Matrix-Differentialgleichung

$$\dot{Z} = Df(\gamma(t))Z(t), \quad Z(0) = \mathrm{Id}.$$

Wir wissen, dass

$$Z(t) = e^{Bt}Q(t) \quad \text{mit} \quad Q(t+p) = Q(t)$$

ist und damit $Z(p) = e^{Bp}$. Die Eigenwerte der Matrix e^{Bp} sind die Floquet-Multiplikatoren. Ein Eigenwert ist immer $\lambda_1 = 1$, da

$$\dot{\gamma} = f(\gamma(t)) \implies \frac{d}{dt}\dot{\gamma} = Df(\gamma(t))\dot{\gamma}.$$

Die restlichen $n-1$ Floquet-Multiplikatoren sind gerade die $n-1$ Eigenwerte der linearierten Poincaré-Abbildung $D\mathcal{P}(0)$.