

2 “Chaos”: Vier Beispiele

Obwohl komplizierte Dynamik schon von Poincaré vor über 100 Jahren beschrieben wurde und Smale, Anosov, Arnold, Shilnikov u.a. in den 60er und 70er-Jahren Mechanismen für ein solches Verhalten systematisch untersucht haben, ist erst vor etwa 20 Jahren die nichtlineare Dynamik unter dem Schlagwort “Chaostheorie” öffentlich bekannt geworden. Ausschlaggebend war dabei, dass auch sehr einfache deterministische Systeme (Intervallabbildungen, komplexe Abbildungen, Hénon-Abbildung,...) ein verblüffend kompliziertes Verhalten aufweisen und dass seit Anfang der 80er-Jahre diese Gleichungen von jedermann mit einem PC simuliert und untersucht werden können. Viele der aufgeworfenen mathematischen Fragen führen dabei auf sehr tiefliegende Zusammenhänge und die Untersuchung dieser “einfachen” Systeme hat zur Entwicklung neuer Ideen geführt.

Interessant ist auch, dass es zum zentralen Begriff **Chaos** keine, bzw. viele verschiedene Definitionen gibt. Wir werden deshalb in diesem Kapitel einige Beispiele für anscheinend chaotisches Verhalten betrachten und gleichzeitig einige Begriffe einführen, die bei der Definition von Chaos eine Rolle spielen.

Wichtig für das Auftreten von komplizierter Dynamik ist meist das Zusammentreffen von zwei Phänomenen:

- **sensitive Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen.** Oft vergrößert sich der Abstand zweier benachbarter Punkte mit einer exponentiellen Rate (kontinuierliche Zeit) oder mit einem konstanten Faktor pro Iteration (diskrete Zeit). Messfehler vergrößern sich exponentiell stark.
- **Rekurrenz** Insbesondere im Fall kompakter Phasenräume/Trajektorien kann die Separation von Trajektorien nicht unbeschränkt weitergehen. Rekurrenz bedeutet, dass Trajektorien beliebig nahe an ihren Ausgangspunkt zurückkehren. Am einfachsten erreicht man dies, wenn der zugrunde liegende Raum kompakt ist.

2.1 Die logistische Abbildung

Die sogenannte **logistische Abbildung** $f_\lambda : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ mit

$$f_\lambda(x) = \lambda x(1 - x)$$

mit $\lambda \geq 0$ nennt man gelegentlich auch die **quadratische Familie**. Die Iteration $x_{n+1} = f_\lambda(x_n)$ zeigt für verschiedene Werte von λ ein sehr unterschiedliches Verhalten. $0 \leq \lambda < 1$: In diesem Fall ist $f_\lambda(x) < x$, die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton fallend und konvergiert für alle Anfangswerte x_0 gegen den Fixpunkt $x = 0$. Die Stabilität dieses Fixpunkts ergibt sich auch aus dem Prinzip der linearisierten Stabilität, da $|f'_\lambda(0)| = \lambda < 1$. Genauso sieht man auch, dass dieser Fixpunkt für $\lambda > 1$ instabil ist.

$1 < \lambda < 2$:

Die Abbildung f_λ hat für alle λ zwei Fixpunkte $x = 0$ und $x_* = x_*(\lambda) = \frac{\lambda-1}{\lambda}$, die für $\lambda = 1$ zusammenfallen. Bei diesem Überkreuzen der Fixpunkte wechselt die Stabilität. Alle Trajektorien mit $x_0 \neq 0$ konvergieren gegen x_* . Der alte Fixpunkt $x = 0$ existiert

weiter, er ist aber instabil und daher “unsichtbar”. Ein solcher Stabilitätswechsel heißt **transkritische Verzweigung**.

$2 < \lambda < 3$:

Der Fixpunkt $x_*(\lambda)$ ist immer noch stabil, allerdings ist $f'_\lambda(x_*) = 2 - \lambda < 0$. Daher ist die Konvergenz oszillatorisch, die Iterierten x_n sind abwechselnd kleiner und größer als x_* .

$3 < \lambda < 1 + \sqrt{6}$:

Wie man nachrechnet wird bei $\lambda = 3$ auch der Fixpunkt x_* instabil, da $f'_\lambda(x_*) = \lambda(1 - 2x_*) < -1$. Betrachtet man die Gleichung für 2-periodische Punkte

$$f_\lambda^2(x) = x \iff x(\lambda - 1 - \lambda x)(\lambda^2 x^2 - \lambda^2 x - \lambda x \lambda + 1) = 0,$$

so treten für $\lambda = \lambda_1 > 3$ zwei neue Lösungen

$$x_\pm = \frac{\lambda + 1 \pm \sqrt{(\lambda - 1)^2 - 4}}{2\lambda}$$

auf. Diese werden von f_λ aufeinander abgebildet, es handelt sich also tatsächlich um einen 2-periodischen Orbit. Es ist natürlich kein Zufall, dass die neuen periodischen Lösungen gerade dann auftreten, wenn der Fixpunkt instabil wird. Wieder ist eine Verzweigung verantwortlich, diesmal eine sogenannte **Periodenverdopplung**.

Um die Stabilität des 2-periodischen Orbits zu bestimmen, berechnen wir

$$(f_\lambda \circ f_\lambda)'(x_\pm) = f'_\lambda(x_-)f'_\lambda(x_+) = (-1 + \sqrt{(\lambda - 1)^2 - 4})(-1 - \sqrt{(\lambda - 1)^2 - 4})$$

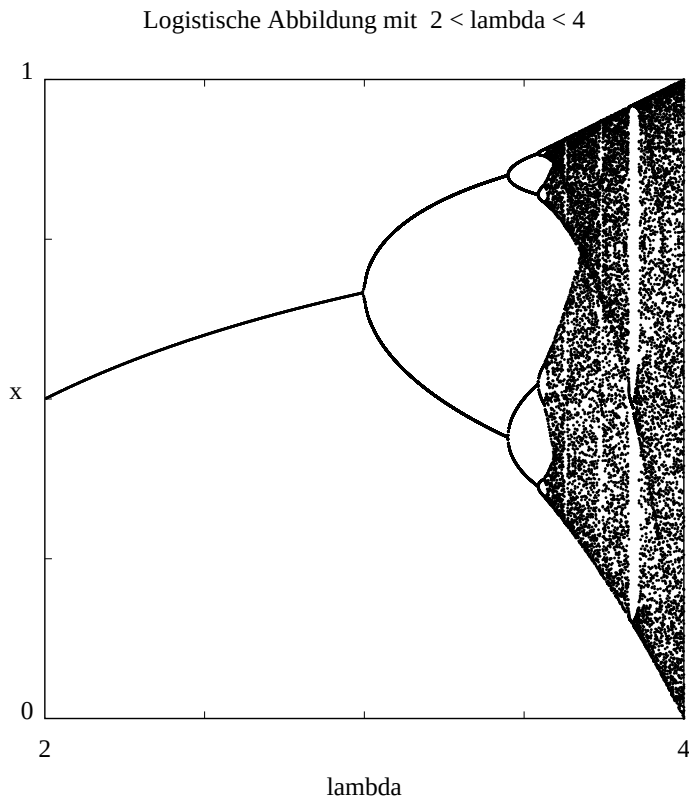
Man sieht nun, dass $(f_\lambda^2)'(x_\pm) < -1$ für $\lambda > \lambda_2 = 1 + \sqrt{6}$. Bei $\lambda = 1 + \sqrt{6}$ entsteht ein stabiler 4-periodischer Orbit, während der 2-periodische Orbit instabil wird. Für wachsendes λ gibt es eine unendliche Folge weiterer solcher Periodenverdopplungen bei Parameterwerten $\lambda_3, \lambda_4, \dots$, die immer dichter beieinander liegen. Für $\lambda \in [\lambda_n, \lambda_{n+1}]$ existiert dann genau ein stabiler 2^n -periodischer Orbit und instabile 2^k -periodische Orbits für $k = 0, 1, \dots, n - 1$. Feigenbaum hat beobachtet, dass das Verhältnis $\frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}$ gegen die **Feigenbaum-Konstante** $\delta = 4,69920166\dots$ konvergiert. Diese Konstante tritt nicht nur bei der quadratischen Familie auf, sie ist eine universelle Größe, die ganz allgemein bei Periodenverdopplungs-Kaskaden eine Rolle spielt.

Da die Periodenverdopplungen in etwa einer geometrischen Folge entsprechen, existiert der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 3.5699456\dots$. Zwischen diesem Wert und $\lambda = 4$ findet man weite Bereiche, in denen die Trajektorien chaotisch aussehen, aber auch Bereiche mit einfacher Struktur, zum Beispiel 3-periodische Orbits.

Definition: Ein diskretes dynamisches System $f : X \rightarrow X$ heißt **topologisch transitiv**, falls es einen Punkt x_0 gibt, so dass der Orbit $\gamma(x_0)$ dicht ist in X .

Falls für eine Teilmenge $A \subseteq X$ der Orbit *jedes* Punktes $x \in A$ dicht in A ist, dann heißt A eine **minimale Menge** von f .

Man kann nun vermuten, dass es einige (viele ?) Werte von $\lambda \in [3.5699456, 4]$ gibt, für die ein Intervall existiert, auf dem f_λ transitiv ist. Für $\lambda = 4$ werden wir später in den Übungen sehen, dass f_4 topologisch transitiv auf $[0, 1]$ ist.



2.2 Angeregtes Pendel

Wir betrachten ein mathematisches Pendel mit einer periodischen äußeren Anregung:

$$\ddot{x} + \sin x = \gamma \cos \omega t$$

Wir schreiben die Gleichung auch als System von Differentialgleichungen 1. Ordnung schreiben:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\sin x + \gamma \cos \omega t\end{aligned}$$

Ohne Anregung ($\gamma=0$) erhalten wir die *autonome* Gleichung

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\sin x\end{aligned}$$

Diese Gleichung ist ein Hamilton-System und besitzt daher eine Erhaltungsgröße

$$H(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \dot{x}^2 - \cos x$$

H ist also längs Trajektorien konstant, bzw. die Niveaumengen von H bestehen aus Trajektorien. Auf diese Weise können wir ohne große Probleme das Phasenportrait für $\gamma = 0$ skizzieren.

Im folgenden betrachten wir wieder die periodisch angeregte Gleichung und schreiben diese als autonome Gleichung 1. Ordnung:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\sin x + \gamma \cos \omega \theta \\ \dot{\theta} &= 1\end{aligned}$$

mit $(x, y, \theta) \in S^1 \times \mathbb{R} \times S^1$.

Man kann nun den Poincaré-Schnitt $\theta = 1$ betrachten, d.h. die Zeit- $\frac{2\pi}{\omega}$ -Abbildung. Anders als in der Einleitung benutzen wir diesmal keinen periodischen Orbit, um lokal eine Poincaré-Abbildung festzulegen, sondern die einfache Struktur der dritten Gleichung, die sicherstellt, dass jede Trajektorie immer wieder nach $\theta = 1$ zurückkehrt. Die Poincaré-Abbildung ist daher auch nicht lokal, sondern eine Abbildung $S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$. Genau genommen muss man dafür noch sicherstellen, dass alle Lösungen global (d.h. für alle positiven Zeiten) existieren. Dazu benutzt man am besten ebenfalls die Funktion $H(x, y) = \frac{1}{2} y^2 - \cos x$, deren Niveaumengen in $S^1 \times \mathbb{R}$ beschränkt sind.

Um die Sache nicht zu kompliziert zu machen, halten wir den Parameter ω fest und lassen nur γ variieren. Die hyperbolische Ruhelage für $\gamma = 0$ entspricht einem hyperbolischen Fixpunkt der Poincaré-Abbildung für $\gamma = 0$. Für $\gamma \approx 0$ bleibt dieser erhalten ($\leadsto$ Satz über implizite Funktionen), man findet also einen periodischen Orbit vom Satteltyp in der Nähe des ursprünglichen Fixpunkts. Dieser periodische Orbit wird für wachsendes γ immer größer und verschwindet irgendwann.

Ab einem gewissen Punkt ist dann keine regelmäßige Struktur mehr zu erkennen und die Bewegung ist offensichtlich "chaotisch". Betrachtet man allerdings die Poincaré-Abbildung, so sieht man, dass auch im chaotischen Bereich eine gewisse Struktur erhalten bleibt. Nur gewisse Bereiche des Schnitts werden von Trajektorien erreicht. Außerdem findet man im Phasenraum durchaus Bereiche mit relativ "einfacher" Dynamik, z.B. invariante Kurven der Poincaré-Abbildung, die im vollen System invarianten Tori entsprechen.

In anderen Bereichen ist dagegen keine Struktur mehr zu erkennen.

Ein ähnliches Verhalten findet man beim **Duffing-Oszillator**

$$\ddot{x} + x - x^3 = \gamma \cos \omega t$$

bei dem der Sinus-Term (ungefähr) durch die ersten beiden Terme seiner Taylor-Entwicklung ersetzt wurde (siehe Übungen).

2.3 Expansive Abbildung

Betrachte die (unstetige) Abbildung $E_2 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ mit

$$E_2(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2x - 1 & \text{für } \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

Schreiben wir ein $x \in [0, 1]$ als nicht-abbrechende Dualzahl

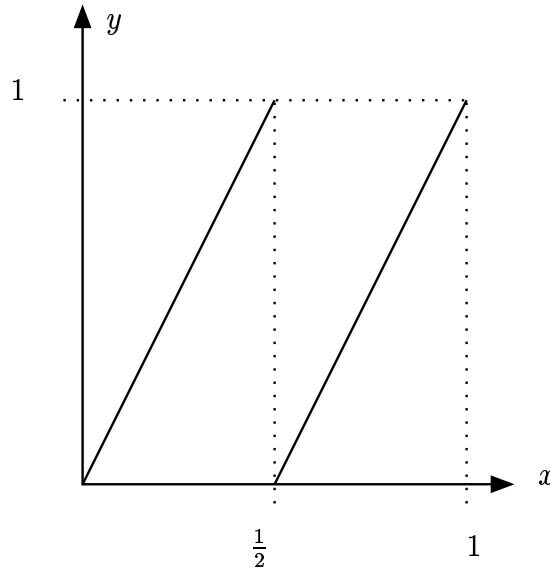


Abbildung 1: Die expansive Abbildung E_2

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i 2^{-i},$$

so ist wie man leicht nachprüft

$$E_2(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{i+1} 2^{-i}.$$

Die Abbildung E_2 bewirkt in der Binärdarstellung also gerade eine Verschiebung, einen “Shift”, um eine Stelle. Insbesondere findet man damit sofort periodische Orbits jeder Periode, z.B. den 5-periodischen Orbit $x = \overline{11000} = 24/31$. Man findet sogar in jeder beliebig kleinen offenen Menge Punkte, die schließlich auf genau diesen periodischen Orbit abgebildet werden. Das gilt natürlich genauso für jeden anderen periodischen Orbit.

Die “meisten” Trajektorien sind allerdings nicht periodisch und konvergieren auch nicht gegen einen periodischen Orbit. Wir werden daher unsere Definition von “Chaos” nicht zu sehr an periodischen Orbits festmachen, sondern im nächsten Kapitel Wege suchen, um auch die nicht-periodischen Orbits angemessen zu beschreiben.

Eine weitere Eigenschaft chaotischer Systeme ist ihre “Nicht-Vorhersehbarkeit”. Trotz der deterministischen Struktur ist das Verhalten nur über eine sehr begrenzte Zeit vorhersagbar, wenn man die Anfangsbedingung nur mit einer gewissen (Mess-)Genauigkeit kennt. Präziser fasst das die folgende Definition.

Definition: Man sagt, dass ein dynamisches System $f : X \rightarrow X$ **sensitive Abhängigkeit** von den Anfangsdaten zeigt, wenn ein $\theta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in X$ und alle $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$ sowie ein $y \in X$ existiert mit

$$|x - y| \leq \varepsilon \quad \text{und} \quad |f^k(x) - f^k(y)| > \theta.$$

Nun sind wir in der Lage, eine der möglichen Definitionen für chaotisches Verhalten zu verstehen.

Definition: Man sagt, dass ein dynamisches System $f : X \rightarrow X$ **chaotisch auf der invarianten Teilmenge Y** ist, falls

- (i) f transitiv auf Y ist und
- (ii) f auf Y sensitive Abhängigkeit von den Anfangsdaten zeigt.

Die expansive Abbildung E_2 ist nach dieser Definition chaotisch auf ihrem gesamten Definitionsbereich. Einen dichten Orbit findet man, indem man alle endlichen 0-1-Folgen hintereinanderschreibt. Durch einen geeigneten Shift kommt man dann beliebig nahe an jede reelle Zahl im Intervall $(0, 1)$.

Um die sensitive Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen nachzuprüfen, wählt man $x \in [0, 1]$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Den Punkt y erhält man, indem man die k -te Nachkommastelle von x abändert, mit $k \in \mathbb{N}$ so groß, dass $|x - y| < \varepsilon$ ist. Wendet man nun $k - 1$ -mal die Abbildung E_2 auf x , bzw. den Shift auf die Binärdarstellungen von x und y an, so gelangt die abgeänderte Stelle ganz nach vorne und es ist $E_2^k(x) - E_2^k(y) = 1/2$. Man sieht sogar, dass der Abstand der Trajektorien von x und y sich in jedem Schritt genau verdoppelt.

Bemerkung: Eine *invertierbare* (aber unstetige) Abbildung, die ein sehr ähnliches Verhalten zeigt, ist die sogenannte **Baker map**

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = \begin{cases} (2x_n, \frac{1}{2}y_n), & \text{falls } x_n \leq \frac{1}{2} \\ (2x_n - 1, \frac{1}{2}y_n + \frac{1}{2}), & \text{falls } x_n > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Da die Folge der x_n sich verhält wie $E_2^n(x_0)$, muss man sich im wesentlichen um die Folge der y_n kümmern. Das überlassen wir netterweise als freiwillige Übungsaufgabe.

2.4 Chua's Schaltkreis

Chua's Schaltkreis ist ein einfacher elektronischer Oszillator, mit dem sich ein komplexes Verhalten erzielen lässt. Er spielt deshalb eine relativ wichtige Rolle in der experimentell orientierten Chaosforschung, weil er sich leicht realisieren und modifizieren lässt.

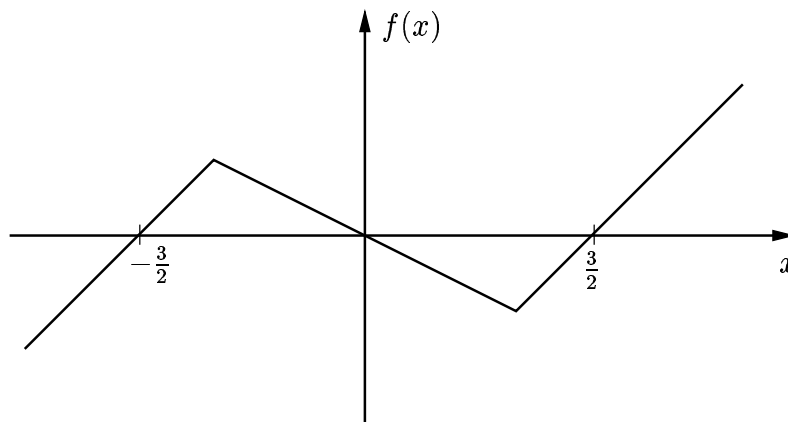
Das mathematische Modell besteht in dimensionsloser Form aus drei Gleichungen

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha(y - f(x)) \\ \dot{y} &= x - y + z \\ \dot{z} &= -\beta y\end{aligned}$$

mit einer stückweise linearen Nichtlinearität

$$f(x) = \frac{2}{7}x - \frac{3}{14}(|x+1| - |x-1|).$$

Hier haben wir es mit einem **symmetrischen** dynamischen System zu tun: Die Differen-



tialgleichungen gehen unter der Transformation $(x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)$ in sich über. Das bedeutet jedoch nicht, dass auch alle Lösungen symmetrisch sind. Mit $(x(t), y(t), z(t))$ ist jedoch immer auch $(-x(t), -y(t), -z(t))$ eine Lösung.

Viele Phänomene lassen sich an diesem einfachen Modell beobachten. Wir erwähnen nur zwei davon:

1. Ähnlich wie bei der logistischen Abbildung kann man eine Sequenz von Periodenverdopplungen verfolgen. Bei festem $\beta = 14.3$ und $\alpha < 6.8$ besitzt das System zwei stabile Ruhelagen. Diese werden instabil bei $\alpha \approx 6.8$ und es bildet sich ein periodischer Orbit. Diese Änderung des Verhaltens nennt man **Hopfverzweigung**, wir werden darauf noch genauer zu sprechen kommen. Bei $\alpha \approx 8.18$ "verdoppelt" sich jeder dieser periodischen Orbits, das heißt es entstehen dann periodische Orbits, die zweimal umlaufen, bevor sie sich schließen. Aus diesen werden dann 4-periodische Orbits usw. bis bei etwa $\alpha \approx 8.48$ ein Paar von Attraktoren zu beobachten ist, und keine Periodizität mehr erkennbar ist.
2. Das Paar symmetrischer Attraktoren wird bei $\alpha \approx 8.82$ zu einem einzigen Attraktor, dem sogenannten "double scroll attractor". Diese Kollision eröffnet neue Möglichkeiten für die Dynamik, da die Trajektorien nun unregelmäßig zwischen den beiden Scheiben hin- und herpendeln können.

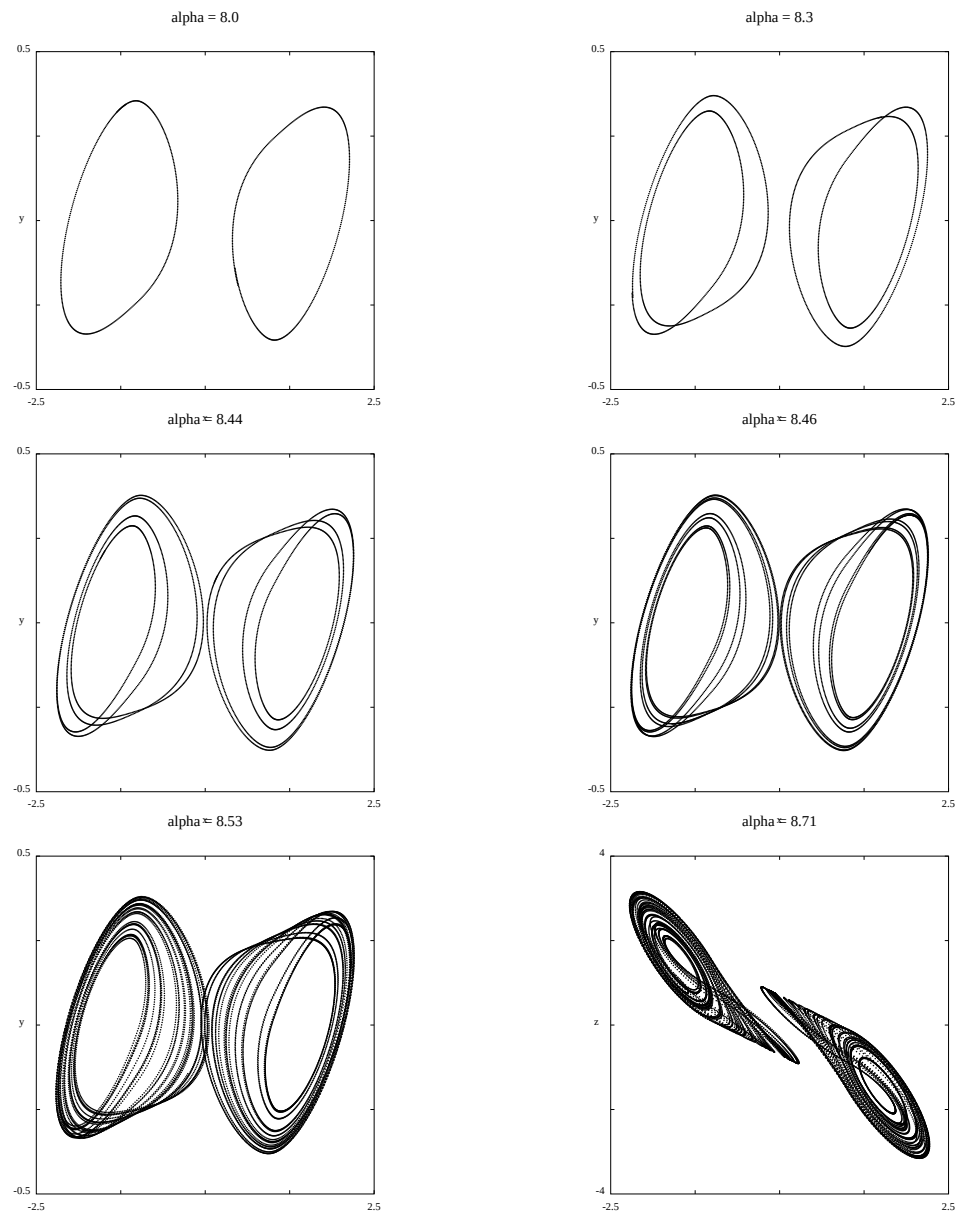


Abbildung 2: Numerisch berechnete Lösungen von Chua's Oszillator für $\beta = 14.3$ und verschiedene Werte von α .

