

3 Intervallabbildungen

3.1 Stetige Abbildungen

Von allen dynamischen Systemen vielleicht am besten verstanden sind die Selbstabbildungen eines Intervalls. Wie so oft in der Mathematik kann man sehr detaillierte Aussagen über ein relativ einfaches Objekt treffen, während man für kompliziertere Systeme entsprechend weniger präzise Aussagen hat.

Im folgenden sei $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ immer eine stetige, aber meistens nicht injektive Abbildung. In den Übungen wird gezeigt, dass die Dynamik monotoner Intervallabbildungen nicht sehr reichhaltig ist. Insbesondere wird f daher nicht invertierbar sein und wir können i.a. nur Vorwärtsiterierte eines Punktes betrachten.

Eine Möglichkeit, sich die Dynamik zu veranschaulichen ist die sogenannte graphische Iteration (im Englischen auch “cobweb diagram”=“Spinnweben–Diagramm” genannt).

Dabei zeichnet man in ein Diagramm neben dem Graphen von f noch die 1. Winkelhalbierende ein. Ausgehend vom Startpunkt x_0 bestimmt man mit Hilfe des Graphen den Wert $x_1 := f(x_0)$. Durch horizontale Projektion auf die Gerade $\{x = y\}$ findet man den Punkt mit Koordinaten (x_1, x_1) . Der Graph liefert nun $x_2 := f(x_1)$. So kann man fortfahren und sukzessive alle Iterierte von x_0 bestimmen. Die graphische Iteration hilft auch, das Langzeitverhalten der Abbildung zu verstehen.

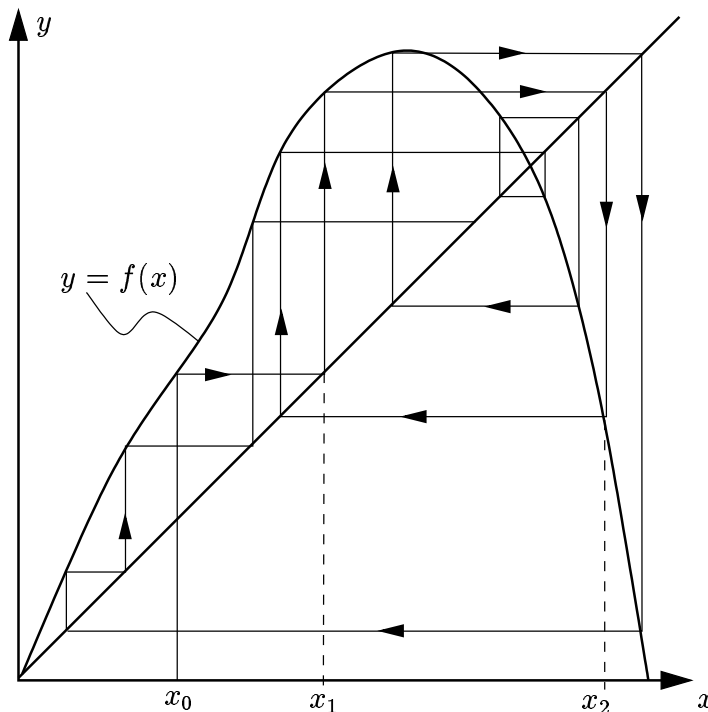


Abbildung 2: Graphische Iteration

3.2 Stabilität

Aus den ‘‘Dynamischen Systemen I’’ wissen wir, dass ein Fixpunkt asymptotisch stabil ist, falls alle Eigenwerte der Linearisierung vom Betrag kleiner 1 sind. In diesem Fall konvergieren alle Punkte aus einer kleinen Umgebung von x_* gegen x_* . Falls ein Eigenwert mit Betrag größer 1 existiert, dann ist der Fixpunkt instabil. Für einen Fixpunkt x_* einer Intervallabbildung f bedeutet das

$$\begin{aligned} |f'(x_*)| < 1 &\implies x_* \text{ ist asymptotisch stabil} \\ |f'(x_*)| > 1 &\implies x_* \text{ ist instabil} \end{aligned}$$

Im Fall $f'(x_*) = \pm 1$ muss man Terme höherer Ordnung berücksichtigen, um etwas über die Stabilität sagen zu können.

Periodische Punkte mit Periode p fassen wir als Fixpunkte der Abbildung $f^p = f \circ f \circ \dots \circ f$ auf. Dann gilt für deren Stabilität:

$$\begin{aligned} |(f^p)'(x_*)| &= \prod_{i=0}^{p-1} |f'(f^i(x_*))| < 1 \implies \text{der periodische Orbit ist asymptotisch stabil} \\ |(f^p)'(x_*)| &= \prod_{i=0}^{p-1} |f'(f^i(x_*))| > 1 \implies \text{der periodische Orbit ist instabil} \end{aligned}$$

3.3 Der Satz von Sharkovskii

Eine wichtige Beobachtung, die wir immer wieder machen werden, besteht darin, dass Trajektorien eines dynamischen Systems nicht unabhängig voneinander sind. Das Vorhandensein bestimmter Orbits bewirkt das Auftreten anderer Trajektorien. Die vielleicht verblüffendste Aussage in dieser Richtung stammt von Sharkovskii.

Satz 3.1 (Satz von Sharkovskii, 1964) *Betrachte die folgende Ordnung \triangleleft auf den natürlichen Zahlen:*

$$3 \triangleleft 5 \triangleleft 7 \triangleleft \dots \triangleleft 2 \cdot 3 \triangleleft 2 \cdot 5 \triangleleft 2 \cdot 7 \triangleleft \dots \triangleleft 2^2 \cdot 3 \triangleleft 2^2 \cdot 5 \triangleleft 2^2 \cdot 7 \triangleleft \dots \triangleleft 2^4 \triangleleft 2^3 \triangleleft 2^2 \triangleleft 2$$

Dann gilt: Falls eine stetige Abbildung $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ einen periodischen Orbit der Periode p besitzt und $p \triangleleft q$ ist, dann besitzt f auch einen periodischen Orbit der minimalen Periode q .

Wir werden diesen Satz nicht beweisen, sondern nur zwei Spezialfälle, sozusagen die linke und die rechte Seite der Sharkovskii-Ordnung. Der Beweis des gesamten Satzes ist nicht wesentlich schwieriger, aber länger.

Der Satz von Sharkovskii sagt auch nichts aus über nicht-periodische Orbits, die in der Regel auch zu komplizierter Dynamik beitragen.

Ein Teil des Satzes von Sharkovskii wurde 1975 durch Li & Yorke wiederentdeckt und in einem Artikel mit dem plakativen Titel *Period Three Implies Chaos* veröffentlicht.

Satz 3.2 (Periode 3 \implies Chaos, 1. Version) *Sei $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ eine stetige Abbildung des Einheitsintervalls. Falls f einen periodischen Punkt der Periode 3 besitzt, dann existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein Punkt mit minimaler Periode n .*

Zum Beweis werden wir das folgende Lemma benutzen.

Lemma: Sei $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ eine stetige Abbildung. Dann gilt:

(i) Falls $J \subseteq [0, 1]$ ein abgeschlossenes Intervall ist mit $f(J) \supseteq J$, dann besitzt f einen Fixpunkt in J .

(ii) Falls $J_0, J_1, \dots, J_{n-1} \subset [0, 1]$ abgeschlossene Intervalle sind mit

$$f(J_0) \supseteq J_1, f(J_1) \supseteq J_2, \dots, f(J_{n-2}) \supseteq J_{n-1}, f(J_{n-1}) \supseteq J_0,$$

dann existiert ein n -periodischer Punkt $x \in J_0$ mit $f^k(x) \in J_k$ für $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Beweis des Lemmas:

(i) ist eine direkte Anwendung des Zwischenwertsatzes. Sei $J = [a, b]$. Da $J \subseteq f(J)$ existieren $c, d \in J$ mit $f(c) = a$ und $f(d) = b$.

Für die Funktion $g(x) := f(x) - x$ gilt dann $g(c) = f(c) - c = a - c \leq 0$ und $g(d) = f(d) - d = b - d \geq 0$. Daher besitzt g eine Nullstelle zwischen c und d . Diese entspricht einem Fixpunkt von f .

(ii) Wir konstruieren eine Folge verschachtelter Intervalle $J_0^k \subseteq J_0$ mit $f^k(J_0^k) = J_k$. Gleichheit benötigen wir, um später genau sagen zu können, durch welche Intervalle J_k die Trajektorie eines Punktes verläuft.

Zunächst ist $f(J_0) \supseteq J_1 =: [a_1, b_1]$, der Zwischenwertsatz sagt uns also, dass die beiden Mengen

$$\begin{aligned} A &:= \{x \in J_0; f(x) = a_1\} \quad \text{und} \\ B &:= \{x \in J_0; f(x) = b_1\} \end{aligned}$$

nicht-leer sind. Wir wählen nun $x_0 \in B$ beliebig und setzen ohne Einschränkung voraus, dass die Menge $\{x \in A; x < x_0\}$ nicht-leer ist. Definieren wir dann

$$\begin{aligned} c &:= \sup\{x \in A; x < x_0\} \quad \text{und} \\ d &:= \inf\{x \in B; x > c\}, \end{aligned}$$

dann liegen zwischen c und d keine Punkte aus A oder B . Daraus folgt mit Hilfe des Zwischenwertsatzes sofort, dass $f([c, d]) = [a, b] = J_1$.

Nun geht man induktiv vor: Falls schon Intervalle $J_0 \supseteq J_0^1 \supseteq J_0^2 \supseteq \dots \supseteq J_0^m$ konstruiert sind mit $f^k(J_0^k) = J_k$ für $k = 1, 2, \dots, m$, dann ist

$$f^{m+1}(J_0^m) = f(J_m) \supseteq J_{m+1}$$

und mit der Konstruktion aus dem ersten Schritt findet man ein Teilintervall $J_0^{m+1} \subseteq J_0^m$ mit $f^{m+1}(J_0^{m+1}) = J_{m+1}$.

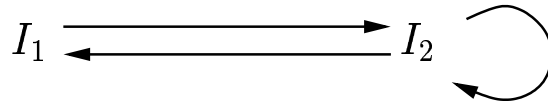
Im n -ten Schritt findet man schließlich ein Intervall J_0^n mit $f^n(J_0^n) = J_0 \supseteq J_0^n$. Nach Teil (i) besitzt f^n dann (mindestens) einen Fixpunkt x in J_0^n und damit f einen Punkt der Periode n . Aus der Konstruktion der Intervalle J_0^k folgt automatisch $f^k(x) \in J_k$. \square

Beweis von Satz 3.2: Seien $x_1 < x_2 < x_3$ die Punkte auf dem Periode-3-Orbit. Für deren Anordnung gibt es zwei Möglichkeiten:

1. $f(x_1) = x_2, f(x_2) = x_3, f(x_3) = x_1$
2. $f(x_1) = x_3, f(x_2) = x_1, f(x_3) = x_2$.

Wir beschränken uns auf die erste Variante. Der Beweis im zweiten Fall verläuft völlig analog.

Sei $I_1 = [x_1, x_2]$ und $I_2 = [x_2, x_3]$. Dann gilt sicher $f(I_2) \supseteq I_2$ und $f(I_1) \supseteq I_2 \cup I_1$. Man kann sich das leicht durch den folgenden gerichteten Graphen veranschaulichen: Zu einer



gegebenen Zahl n betrachtet man nun einen periodischen Weg der Länge n auf diesem Graphen. Dabei kann man ohne Schwierigkeiten sicherstellen, dass die minimale Periode dieses Wegs n ist, zum Beispiel, indem man nur eine Exkursion nach I_2 macht. Man erhält auf diese Weise eine Kette $J_0 \rightarrow J_1 \rightarrow J_2 \rightarrow \dots \rightarrow J_{n-1} \rightarrow J_0$ von Intervallen, so dass $f(J_k) \supseteq J_{k-1}$. Nach Teil (ii) des vorigen Lemmas gibt es dann ein $x \in J_0$ mit $f^n(x) = x$ und $f^k(x) \in J_k$ für $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$. □

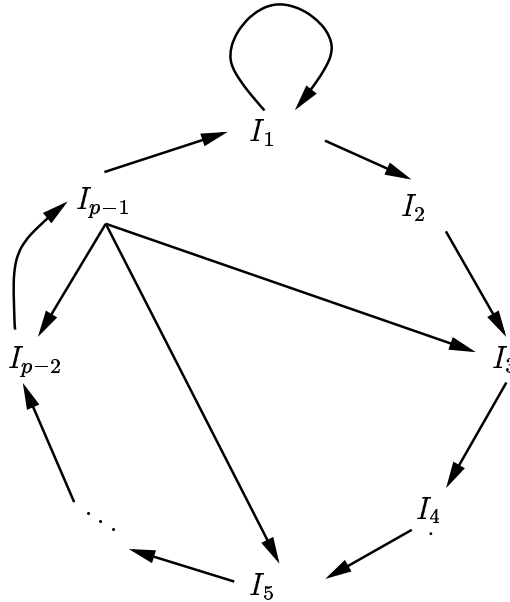
Die Konstruktion, die im Beweis verwendet wurde, kann man folgendermaßen verallgemeinern: Seien $x_1 < x_2 < \dots < x_p$ die Punkte auf einem gegebenen p -periodischen Orbit. Dadurch werden $p - 1$ Intervalle $I_1 := [x_1, x_2], I_2 := [x_2, x_3], \dots, I_{p-1} := [x_{p-1}, x_p]$ definiert. Einen gerichteten Graphen erhält man nun, indem man diese Intervalle als Ecken des Graphen auffasst und die Ecke I_m genau dann zur Ecke I_n verbindet, wenn $I_n \subseteq f(I_m)$, wenn also das Bild von I_m das ganze Intervall I_n überdeckt.

Satz 3.3 *Sei $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ eine stetige Abbildung des Einheitsintervalls. Falls f einen periodischen Punkt der Periode $p > 2$ besitzt, dann existiert auch ein Punkt mit minimaler Periode 2.*

Beweis: Die Strategie ist einfach. Wir nehmen an, dass es einen periodischen Orbit mit minimaler Periode $p > 2$ gibt und zeigen, dass dann auch ein periodischer Orbit mit einer echt kleineren minimalen Periode existiert. Auf diese Weise hangeln wir uns hinunter bis zu einem 2-periodischen Orbit.

Wir starten also mit einem p -periodischen Orbit der Periode $p > 2$, der aus den Punkten $x_1 < x_2 < \dots < x_{p-1}$ besteht. Die Intervalle I_1, \dots, I_{p-2} seien wie oben als $I_k := [x_k, x_{k+1}]$ definiert. Für jedes k existiert dann ein $\ell \neq k$, so dass $I_k \rightarrow I_\ell$. Andernfalls würde f nur die Endpunkte von I_k permutieren. Das ist aber unmöglich, da die Endpunkte ja auf einem periodischen Orbit mit Periode > 2 liegen. Man kann daher einen gerichteten Pfad konstruieren, der bei I_1 beginnt und nach spätestens $p - 2$ Schritten in einen Zykel einmünden muss. Sei $I_{k_1} \rightarrow I_{k_2} \rightarrow \dots \rightarrow I_{k_q}$ dieser Zykel der Länge $q \leq p - 2$. Aus Lemma 3.3(ii) wissen wir, dass f einen periodischen Orbit der Periode q besitzt, und die Iterierten der Reihe nach in I_{k_1}, I_{k_2} und I_{k_q} liegen. Da diese Intervalle sich aber nur in ihren Randpunkten schneiden und die Randpunkte alle auf einem p -periodischen Orbit liegen ist q sogar die minimale Periode des periodischen Orbits. □

Bemerkung: Im Beweis des Satzes von Sharkovskii verwendet man ganz ähnliche Argumente. Der wichtigste Schritt besteht darin zu zeigen, dass für einen periodischen Orbit der ungeraden Periode p der folgende Graph existiert:



Durch geeignete Wege in diesem Graphen kann man alle anderen periodischen Orbits mit Hilfe von Lemma 3.3(ii) konstruieren. Im Fall eines periodischen Orbits der geradzahigen Periode $2^k \cdot q$ betrachtet man die Abbildung f^{2^k} , die dann einen q -periodischen Orbit mit ungerader Periode q besitzt. Damit erhält man dann alle periodischen Orbits, deren Periode ebenfalls durch 2^k teilbar ist. Für die übrigen Perioden $2^{k-1}, 2^{k-2}, \dots, 2$ wendet man dagegen den vorigen Satz auf $f^{2^{k'}}$ mit einem geeigneten k' an.

Man kann weiter durch stückweise lineare Beispiele zeigen, dass der Satz von Sharkovskii scharf ist im folgenden Sinne: Zu jeder Zahl $n \in \mathbb{N}$ lässt sich eine stetige Funktion $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ finden, so dass f einen periodischen Orbit der Periode m besitzt genau dann, wenn $m \triangleleft n$.

Der Satz von Sharkovskii ist ein reiner Existenzsatz. Er sagt nichts über die Stabilität der periodischen Lösungen aus. Insbesondere wissen wir dann, dass in der logistischen Abbildung $f_\lambda(x) = \lambda x(1 - x)$ mit $\lambda = 3.84$ nicht nur ein 3-periodischer Orbit existiert, sondern periodische Orbits jeder Periode. Leider sind diese allesamt instabil, denn wie wir in den Übungen sehen werden, kann für f_λ mit $\lambda \in [1, 4]$ immer höchstens ein periodischer Orbit stabil sein.

3.4 Symbolische Dynamik

In diesem Abschnitt werden wir uns vorübergehend nicht mit Intervallabbildungen befassen, sondern mit Abbildungen auf diskreten Folgenräumen. Diese sind einfacher zu analysieren und werden uns anschließend helfen, Intervallabbildungen besser zu beschreiben.

Wir bezeichnen immer mit

$$\Omega_n = \{1, 2, \dots, n\}^{\mathbb{Z}} = \{\omega = (\dots, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots); \omega_i \in \{1, 2, \dots, n\} \forall i \in \mathbb{Z}\}$$

den Raum der beidseitig unendlichen Folgen mit n Symbolen. Analog ist

$$\Omega_n^+ = \{1, 2, \dots, n\}^{\mathbb{N}} = \{\omega = (\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots); \omega_i \in \{1, 2, \dots, n\} \forall i \in \mathbb{N}\}$$

der Raum der Folgen aus n Symbolen.

Ganz abstrakt können wir eine Topologie auf Ω_n und Ω_n^+ definieren, indem wir beachten, dass Ω_n das kartesische Produkt von abzählbar vielen Kopien der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$ ist. Versieht man diese Menge mit der diskreten Topologie, dann erzeugt dies auf natürliche Weise die Produkttopologie auf Ω_n .

Anschaulicher ist die folgende Variante: Sei δ die diskrete Metrik auf $\{1, 2, \dots, n\}$, d.h.

$$\delta(a, b) = \begin{cases} 0 & \text{für } a = b \\ 1 & \text{für } a \neq b \end{cases}$$

Dann erzeugt die Metrik

$$d_2(\omega, \hat{\omega}) := \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{\delta(\omega_i, \hat{\omega}_i)}{2^{|i|}}$$

die oben angesprochene Topologie auf Ω_n .

Zwei Folgen liegen in dieser Metrik nahe beieinander, wenn sie auf einem langen Abschnitt in der Mitte übereinstimmen. Etwas präziser gefasst:

- (i) Seien $\omega, \hat{\omega} \in \Omega_n$ zwei Folgen mit $d_2(\omega, \hat{\omega}) < 2^{-k}$. Dann ist $\omega_i = \hat{\omega}_i$ für $-k \leq i \leq k$.
- (ii) Falls $\omega_i = \hat{\omega}_i$ für $-k \leq i \leq k$, dann ist $d_2(\omega, \hat{\omega}) \leq 2^{-k+1}$. Selbst wenn $\omega_i \neq \hat{\omega}_i$ ist für alle Folgenglieder mit $|i| > k$ wäre noch

$$d_2(\omega, \hat{\omega}) = 2 \cdot (2^{-(k+1)} + 2^{-(k+2)} + 2^{-(k+3)} + \dots) = 2^{-k+1}.$$

Bemerkung(zur Produkttopologie): Seien $X_i, i \in \mathbb{N}$ abzählbar viele topologische Räume. Die Produkttopologie des kartesischen Produkts $\prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$, indem man als Basis der Topologie Mengen der Form $\prod_{i \in \mathbb{N}} U_i$ mit offenen Mengen $U_i \subseteq X_i$ wählt und zusätzlich verlangt, dass $U_i \neq X_i$ nur für endlich viele i . Da offene Mengen die Vereinigung von Mengen aus der Basis der Topologie sind, ist also jede offene Menge genau von dieser Form. Die so erzeugte Produkttopologie besitzt dann beispielsweise die wichtige Eigenschaft, dass die kanonische Projektion π_i auf jeden der Räume X_i stetig ist.

Eine Menge S heißt **perfekt**, wenn jeder Punkt $s \in S$ Häufungspunkt von $S \setminus \{s\}$ ist und **total unzusammenhängend**, falls jede Zusammenhangskomponente von S aus genau einem Punkt besteht.

Definition: Eine Menge, die

- (i) überabzählbar,
- (ii) kompakt,

- (ii) perfekt und
- (iii) total unzusammenhängend

ist, heißt **Cantormenge**.

Lemma: Die Menge Ω_n ist eine Cantormenge.

Beweis: Übungsaufgabe □

Ein auf den ersten Blick sehr einfaches dynamisches System wird erzeugt, indem man die Folgen aus Ω_n um einen Index nach links verschiebt,

Definition: Wir nennen die Abbildung

$$\sigma : \Omega_n \rightarrow \Omega_n \quad \text{bzw.} \quad \sigma : \Omega_n^+ \rightarrow \Omega_n^+$$

mit $(\sigma(\omega))_i = \omega_{i+1}$

die **Shift–Abbildung** oder kurz den **(Bernoulli-)Shift** auf n Symbolen.

Beachte, dass σ auf dem Raum Ω_n bijektiv ist, nicht jedoch auf Ω_n^+ , da man in letzterem Fall die erste Stelle ω_0 „vergisst“.

Satz 3.4 Die Shift-Abbildung σ auf Ω_n hat die folgenden Eigenschaften:

- (i) $\sigma : \Omega_n \rightarrow \Omega_n$ ist ein Homöomorphismus,
- (ii) für jedes $m \in \mathbb{N}$ findet man genau n^m periodische Punkte der (nicht unbedingt minimalen) Periode m ,
- (iii) Die Menge der periodischen Punkte ist dicht in Ω_n ,
- (iv) es gibt einen dichten Orbit, σ ist also transitiv.
- (v) σ zeigt sensitive Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen.

Beweis:

- (i) σ ist bijektiv mit dem „Shift nach rechts“ als Umkehrabbildung. Wir zeigen nur die Stetigkeit von σ , die Stetigkeit von σ^{-1} lässt sich völlig analog beweisen.

Sei dazu ε gegeben mit $2^{-k} < \varepsilon$.

Behauptung: $d_2(\omega, \hat{\omega}) < 2^{-(k+2)} \Rightarrow d_2(\sigma(\omega), \sigma(\hat{\omega})) < \varepsilon$,

denn: es ist $\omega_i = \hat{\omega}_i$ auf einem Abschnitt $-k-2 \leq i \leq k+2$. Daher gilt für die um einen Index verschobenen Folgen $\sigma(\omega)_i = \sigma(\hat{\omega})_i$ für $-k-3 \leq i \leq k+1$. Damit ist $d_2(\sigma(\omega), \sigma(\hat{\omega})) < 2^{-k} < \varepsilon$.

- (ii) Es gibt n^m verschiedene m -Tupel. Jedes davon entspricht einem m -periodischen Punkt, wenn man die Folge periodisch fortsetzt.
- (iii) Sei $\omega \in \Omega_n$ beliebig. Als Folge $\omega^{(k)}$ wählen wir die $(2k+1)$ -periodische Folge mit $\omega_i^{(k)} = \omega_i$ für $|i| \leq k$. Dann stimmen ω und $\omega^{(k)}$ auf immer längeren Abschnitten überein und es gilt $\omega^{(k)} \rightarrow \omega$.

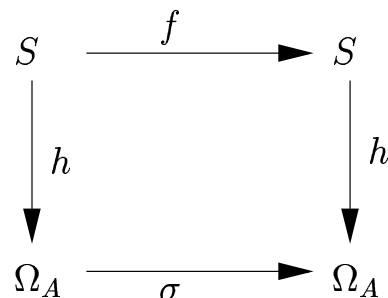
- (iv) Schreibe alle *endlichen* Folgen in zunehmender Länge hintereinander und fülle nach links mit lauter Nullen auf. Die so erhaltene beidseitig unendliche Folge nennen wir ν . Dann gibt es zu jeder Folge $\omega \in \Omega_n$ und jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl N , so dass $(\sigma^N(\nu))_i = \omega_i$ ist für $|i| \leq k$ mit $2^{-k} \leq \varepsilon$. Damit ist dann $d_2(\sigma^N \nu, \omega) < \varepsilon$.
- (v) Zu einem gegebenen $\varepsilon > 0$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $2^{-k} < \varepsilon$. Sei nun $\omega \in \Omega_n$ gegeben. Wähle eine Folge $\hat{\omega} \in \Omega_n$ mit $\omega_i = \hat{\omega}_i$ für $-k \leq i \leq k$ und $\omega_{k+1} \neq \hat{\omega}_{k+1}$. Dann ist $d_2(\sigma^{k+1}(\omega), \sigma^{k+1}(\hat{\omega})) \geq 1/2$.

□

Die Einschränkung der Shift-Abbildung auf eine abgeschlossene, invariante Teilmenge von Ω_n bezeichnet man als **symbolisches dynamisches System**. Symbolische Dynamik erlaubt eine elegante und oftmals einfache Beschreibung von sehr komplexen Phänomenen. Man benutzt sie als Modell, allerdings ist es in der Regel nicht leicht zu zeigen, dass ein gegebenes dynamisches System konjugiert ist zu einem symbolischen dynamischen System. Aus diesem Grund gibt man sich oft damit zufrieden zu zeigen, dass das reale System S **semi-konjugiert** zu dem symbolischen dynamischen System Ω_A ist, d.h. es existiert eine stetige Abbildung $h : S \rightarrow \Omega_A$, die aber nicht injektiv sein muss, so dass gilt:

$$\sigma \circ h = h \circ f.$$

Oft stellt man diese Relation auch in Form eines Diagramms dar: Dabei kann es vorkom-



men, dass einem Orbit von Ω_A mehrere Orbits des ursprünglichen Systems entsprechen. Anschaulich ist die Dynamik von f also "mindestens so kompliziert" wie die von Ω_A . Zunächst wollen wir uns allerdings den Idealfall anschauen, bei dem es gelingt zu zeigen, dass ein gegebenes dynamisches System tatsächlich konjugiert ist zum Shift auf zwei Symbolen.

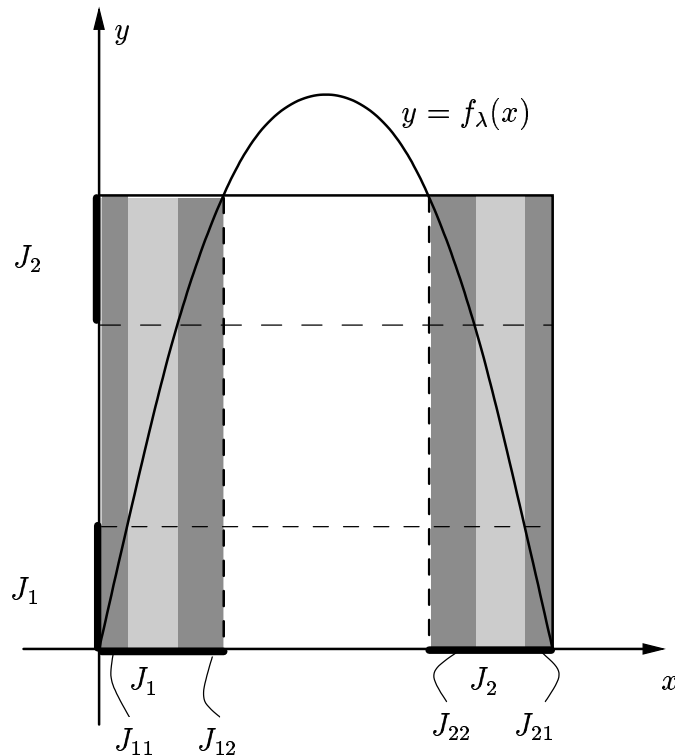
3.4.1 Hufeisendynamik

Bei der logistischen Abbildung $f_\lambda(x) = \lambda x(1 - x)$ mit $\lambda > 4$ wird ein Teil des Bildes von $[0, 1]$ nicht mehr in dieses Intervall abgebildet. Das Urbild von $[0, 1]$ besteht aus zwei Intervallen J_1 und J_2 , die man benutzen kann, um Trajektorien zu kodieren.

Satz 3.5 *Sei $\lambda > 2 + \sqrt{5}$. Dann besitzt die logistische Abbildung f_λ eine invariante Menge S , auf der f konjugiert ist zum Shift Ω_2^+ auf zwei Symbolen. Die Menge S ist eine Cantormenge.*

Zunächst ist $f_\lambda(x) = \lambda x(1-x) < 0$ für $x \notin [0, 1]$. Da dort $f_\lambda(x) < 2x$ gilt $f_\lambda^n(x) \rightarrow -\infty$ für $x < 0$. Es genügt also die Punkte zu suchen, deren Iterierte alle in $[0, 1]$ liegen. Es ist $f_\lambda(x) = 1$ für $x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{\lambda}}$. Daher ist $f^{-1}([0, 1]) = J_1 \cup J_2$ mit

$$J_1 := \left[0, \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{\lambda}} \right] \quad \text{und} \quad J_2 := \left[\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{\lambda}}, 1 \right].$$



Die Punkte, deren Iterierte in $[0, 1]$ bleiben, müssen also sogar alle in $J_1 \cup J_2$ liegen. In der Abbildung ist zu erkennen, dass die Menge der Punkte $x \in J_1$ mit $f_\lambda(x) \in J_1 \cup J_2$ aus zwei Intervallen besteht. Die Urbilder dieser zwei Intervalle nennen wir J_{11} und J_{12} . Die Bezeichnung ist dabei so gewählt, dass

$$x \in J_{1i} \Rightarrow f(x) \in J_i.$$

Genauso besteht die Menge der Punkte $x \in J_2$ mit $f_\lambda(x) \in J_1 \cup J_2$ aus zwei Intervallen, deren Urbilder wir J_{21} und J_{22} nennen. Alle vier Teilintervalle J_{11} , J_{12} , J_{21} und J_{22} werden von f_λ^2 monoton auf das gesamte Intervall $[0, 1]$ abgebildet. Daher besteht beispielsweise

$$\{x \in J_{12}; f_\lambda^2(x) \in J_1 \cup J_2\}$$

wieder aus zwei Intervallen, deren Urbilder unter f_λ^{-2} wir mit J_{121} und J_{122} bezeichnen. Ganz allgemein können wir auf diese Weise zu jeder endlichen 1-2-Folge $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_k$ ein Intervall $J_{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_k}$ finden, so dass

$$J_{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_k} := \bigcap_{i=0}^k f_\lambda^{-i}(J_{\omega_i}) = \{x \in J_{\omega_0}; f_\lambda^i(x) \in J_{\omega_i} \text{ für } 0 \leq i \leq k\}$$

Alle Intervalle zu Folgen einer festen Länge k bilden die Menge

$$S_k := \bigcup J_{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{k-1}}.$$

Dies ist genau die Menge derjenigen Punkte, deren k erste Vorwärtsiterierte in $[0, 1]$ liegen. Daher enthält die Menge $S := \bigcap_{k=1}^{\infty} S_k$ alle Punkte, deren sämtliche Vorwärtsiterierte in $[0, 1]$ liegen. Beachte, dass S als Durchschnitt abgeschlossener Mengen ebenfalls abgeschlossen und wegen $S \subset [0, 1]$ sogar kompakt ist.

Umgekehrt können wir jedem Punkt $x \in S$ eine Folge $\gamma_0(x), \gamma_1(x), \dots$ zuordnen vermöge

$$\gamma_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } f_\lambda^k(x) \in J_1 \\ 2 & \text{falls } f_\lambda^k(x) \in J_2. \end{cases}$$

Die so definierte Abbildung $\Phi : S \rightarrow \Omega_2^+$ nennt man die *Wegabbildung*.

Zu zeigen ist, dass Φ ein Homöomorphismus ist, der f_λ und den Bernoulli-Shift σ auf Ω_2^+ konjugiert.

1. Es gilt $\Phi \circ f_\lambda = \sigma \circ \Phi$, denn:

$$\gamma_k(f_\lambda(x)) = 1 \iff f_\lambda^{k+1}(x) \in J_1 \iff \gamma_{k+1}(x) = 1 \iff \sigma(\Phi(x))_k = 1.$$

2. Φ ist surjektiv:

Offensichtlich findet man zu jeder Folge $\omega \in \Omega_2^+$ einen Punkt der im Schnitt der verschachtelten abgeschlossenen Intervalle

$$J_{\omega_0} \supset J_{\omega_0, \omega_1} \supset J_{\omega_0, \omega_1, \omega_2} \supset \dots$$

liegt.

3. Φ ist injektiv

Die Bedingung $\lambda > 2 + \sqrt{5}$ sorgt genau dafür, dass $|f'_\lambda(x)| > \left| f'_\lambda \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} \pm \frac{1}{\lambda}} \right) \right| =: \rho > 1$ für alle $x \in J_1 \cup J_2$.

Daher ist die Länge der Intervalle $J_{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_k}$ durch eine geometrische Folge majorisiert:

$$|J_{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_k}| \leq \rho^{-k}$$

Insbesondere enthält dann für jede Folge $\omega \in \Omega_2^+$ die Menge

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} J_{\omega_0, \dots, \omega_k}$$

genau einen Punkt $\Phi^{-1}(\omega)$.

4. Φ ist stetig

Sei dazu $x \in S$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir müssen ein $\delta > 0$ finden, so dass für alle $y \in S$ mit $|x - y| < \delta$ gilt: $d_2(\Phi(x), \Phi(y)) < \varepsilon$. Sei $n \in \mathbb{N}$ so groß, dass $2^{-n} < \varepsilon$ ist. Es genügt dann zu zeigen, dass die ersten $n + 1$ Glieder der beiden Folgen $\Phi(x)$ und $\Phi(y)$ übereinstimmen, falls $|x - y| < \delta$.

Die 2^{n+1} Intervalle in S_{n+1} sind abgeschlossen und disjunkt. Wähle $\delta > 0$ so klein, dass der Abstand zwischen je zwei dieser Intervalle mindestens 2δ beträgt. Wenn $|x - y| < \delta$ ist, müssen die Punkte x und y beide im selben Intervall $J_{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n}$ liegen. Dann stimmen $\Phi(x)$ und $\Phi(y)$ auf den ersten $n + 1$ Stellen überein.

5. Φ^{-1} ist stetig
Folgt aus allgemeinen Sätzen: Da Φ stetig und bijektiv ist und der Raum S kompakt, ist automatisch auch Φ^{-1} stetig (Bilder kompakter Mengen unter Φ sind wieder kompakt und Φ^{-1} ist stetig, falls die Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind.)
6. Da S homöomorph zu Ω_2^+ ist, ist S eine Cantormenge, denn alle Eigenschaften einer Cantormenge bleiben unter Homöomorphismen erhalten.

□

Korollar 3.6 Sei $\lambda > 2 + \sqrt{5}$. Dann besitzt die logistische Abbildung f_λ periodische Orbits jeder minimalen Periode, obwohl fast alle Trajektorien das Intervall $[0, 1]$ verlassen.

Bemerkungen:

1. Die Bedingung $\lambda > 2 + \sqrt{5}$ ist dabei nicht optimal, sie stellt sicher, dass $|f'_\lambda| > 1$ für alle x mit $f_\lambda(x) \in [0, 1]$. Im Fall der logistischen Abbildung kann man allerdings zeigen, dass der Satz auch schon für $\lambda > 4$ richtig ist.
2. Die Bezeichnung “Hufeisen” wird in Kapitel 7 klar werden. Grob gesprochen kommt sie hier von der Form des Graphen von f_λ und der Tatsache, dass $f_\lambda(J_i) \supset J_1 \cup J_2$ für $i = 1, 2$.

3.4.2 Subshifts von endlichem Typ *

Eine wichtige Klasse symbolischer dynamischer Systeme sind die sogenannten **Subshifts von endlichem Typ**. Sei dazu $A = (a_{ij})$ eine $n \times n$ -Matrix, deren Einträge aus den Zahlen 0 und 1 bestehen. Wir definieren nun

$$\Omega_A := \{\omega \in \Omega_n; a_{\omega_i \omega_{i+1}} = 1 \quad \forall i \in \mathbb{Z}\}.$$

Die Einsen in der Matrix A geben also an, welche aufeinanderfolgenden Ziffern zulässig sind. Die Menge Ω_A ist abgeschlossen, denn falls eine Folge $\omega^{(k)}$ gegen $\omega \in \Omega_n$ konvergiert, dann stimmen immer längere Abschnitte von $\omega^{(k)}$ und von ω überein. Für diese Abschnitte ist aber die Übergangsregel $a_{\omega_i \omega_{i+1}} = 1$ erfüllt. Offensichtlich ist Ω_A auch invariant unter dem Shift, da die Übergangsregel nicht vom Folgenindex abhängt. Insbesondere definiert der Shift auf Ω_A ein symbolisches dynamisches System.

Definition: Sei A eine $n \times n$ -Matrix mit Einträgen 0 und 1. Dann heißt A **irreduzibel**, falls es eine Zahl $N = N(i, j)$ gibt, so dass alle Einträge $(A^N)_{ij}$ der Matrix A^N positiv sind.

Diese rein algebraische Eigenschaft ist entscheidend dafür, ob ein Subshift endlichen Typs transitiv ist oder nicht.

Satz 3.7 Sei A eine $n \times n$ -Matrix mit Einträgen 0 und 1, so dass keine Spalte und keine Zeile vollständig aus Nullen besteht. Dann gilt:

Ein Subshift von endlichem Typ auf Ω_A ist transitiv genau dann, wenn die $n \times n$ -Matrix A irreduzibel ist.

Beweis:

„ \implies “: Sei $\sigma : \Omega_A \rightarrow \Omega_A$ transitiv. Für beliebige $1 \leq i, j \leq n$ gibt es Folgen ω und $\hat{\omega} \in \Omega_A$ mit $\omega_0 = i$ und $\hat{\omega}_0 = j$. Der dichte Orbit ν muss in die Nähe beider Folgen kommen. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $\nu_0 = i$ und $\sigma^N(\nu)_0 = \nu_N = j$ für eine Zahl $N \in \mathbb{N}$. Es ist

$$(A^N)_{ij} = \sum_{r_1=1}^n \cdots \sum_{r_{N-1}=1}^n a_{ir_1} a_{r_1 r_2} \cdots a_{r_{N-2} r_{N-1}} a_{r_{N-1} j}. \tag{1}$$

Alle Glieder dieser Summe sind nicht-negativ und zumindest ein Folgenglied ist positiv, da $a_{i\nu_1} = a_{\nu_1\nu_2} = \dots = a_{\nu_{N-1}j} = 1$, also ist $(A^N)_{ij} \geq 1$.

„ \impliedby “: Wir möchten ähnlich vorgehen wie beim „normalen“ Shift und schreiben daher zunächst alle endlichen Folgen auf, die die Übergangsregel erfüllen. Diese Folgen können wir jedoch nicht einfach hintereinanderschreiben, da dabei im Allgemeinen die Übergangsregel verletzt wird. Sei y_m das letzte Glied einer solchen endlichen Folge und z_1 das erste Glied der nächsten Folge. Wir möchten geeignete Folgenglieder zwischen y_m und z_1 einfügen, so dass die Übergangsregel weiter gilt. Da A irreduzibel ist, finden wir eine Zahl N , so dass $(A^N)_{y_m z_1} \geq 1$. Wegen der Summendarstellung (1) gibt es daher Symbole $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_{N-1}$, so dass $a_{y_m \hat{x}_1} = a_{\hat{x}_1 \hat{x}_2} = \dots = a_{\hat{x}_{N-1} z_1} = 1$. Fügt man nun die Symbole $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_{N-1}$ zwischen y_m und z_1 ein, so wird die Übergangsregel immer respektiert.

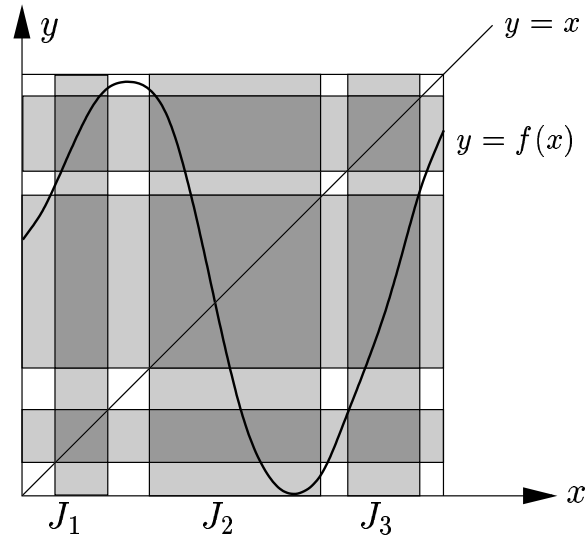
Auf diese Weise kann man alle endlichen Folgen mit Hilfe geeigneter Übergangsstücke hintereinanderkleben und erhält auf so eine Folge in Ω_A , deren Orbit offensichtlich dicht liegt. □

Bemerkung: Man kann die Konstruktion natürlich verallgemeinern und Übergangsregeln einführen, bei denen die Zulässigkeit einer Ziffer nicht mehr nur vom unmittelbaren Vorgänger, sondern von mehreren vorhergehenden Folgengliedern abhängt. Ein Subshift endlichen Typs ist dann ein Subshift, bei dem die Übergangsregeln durch endlich viele Vorgänger bestimmt sind.

Beispiel: Ähnlich wie wir gezeigt haben, dass die Abbildung f_λ mit $\lambda > 2 + \sqrt{5}$ konjugiert ist zum vollen Shift auf zwei Symbolen, kann man für andere Intervallabbildungen zeigen, dass sie (semi-)konjugiert sind zu einem Subshift endlichen Typs. Beispielsweise besitzt die Funktion aus Abbildung 3.4.2 eine invariante Menge, auf der sie konjugiert zu einem Subshift auf der Menge Ω_A ist mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Freiwillige Aufgabe: Wieviele periodische Orbits der Periode 5 besitzt der Subshift auf Ω_A ?

Abbildung 3: Intervallabbildung zu Ω_A

3.4.3 Exkurs: Die Gauss-Abbildung *

Eine Möglichkeit, um positive reelle Zahlen darzustellen, sind **Kettenbrüche**. Wir schreiben

$$x = n_0 + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + \dots}}}$$

oder kurz $x = n_0 + [n_1, n_2, n_3, \dots]$ mit $n_k \in \mathbb{N}$, falls x der Grenzwert der Folge

$$n_0, n_0 + \frac{1}{n_1}, n_0 + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2}}, n_0 + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3}}}, \dots$$

ist. Die Darstellung ist natürlich genau dann endlich, falls x rational ist. Ohne Beweis geben wir zwei Eigenschaften der Näherungsbrüche an.

Lemma 3.8 (i) Für die Näherungsbrüche

$$\frac{p_k}{q_k} = n_0 + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \dots + \frac{1}{n_k}}}$$

gilt die Rekursionsformel

$$p_n = p_{n-1}a_n + p_{n-2}, \quad q_n = q_{n-1}a_n + q_{n-2}$$

mit $p_{-1} = 1$, $p_0 = n_0$, $q_{-1} = 0$ und $q_0 = 1$.

$$(ii) \left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}}$$

Beweis: siehe zum Beispiel die Bücher [Hardy/Wright: Zahlentheorie, S. 148 und S. 157] oder [Perron: Kettenbrüche].

Man kann die Zahlen n_0, n_1, \dots auch folgendermaßen bestimmen: Zunächst ist n_0 die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist. Sei

$$x_1 := x - n_0 = \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + \dots}}}$$

Dann ist $n_1 = [1/x_1]$ die größte natürliche Zahl, die kleiner oder gleich $1/x_1$ ist. Man fährt so fort und bezeichnet mit

$$x_2 := \frac{1}{x_1} - n_1 = \frac{1}{x_1} - \left[\frac{1}{x_1} \right] = \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + \frac{1}{n_4 + \dots}}}$$

den nächsten Rest. Dann ist $n_2 = [1/x_2]$ und man kann genauso fortfahren. Wenn

$$x_k := \frac{1}{x_{k-1}} - n_{k-1} = \frac{1}{x_{k-1}} - \left[\frac{1}{x_{k-1}} \right] = \frac{1}{n_k + \frac{1}{n_{k+1} + \frac{1}{n_{k+2} + \dots}}}$$

dann ist $n_k = [1/x_k]$.

Gauß hat als erster die zugehörige Abbildung $G : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ mit

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0 \\ \left\{ \frac{1}{x} \right\} & \text{falls } x \neq 0 \end{cases}$$

untersucht, die jedem x den gebrochenen Anteil von $1/x$ zuordnet. Diese sogenannte **Gauß-Abbildung** hat unendlich viele Unstetigkeitsstellen. Eleganter ist es daher G als Abbildung des Einheitskreises aufzufassen:

$$\begin{aligned} G : S^1 &\rightarrow S^1 \\ e^{2\pi i x} &\mapsto e^{2\pi i/x} \end{aligned}$$

Interessant ist die folgende Tatsache: Ist $x = [n_1, n_2, n_3, \dots] \in [0, 1]$, so ist $G(x) = [n_2, n_3, n_4, \dots]$. Auf diese Weise verknüpft man die Gauß-Abbildung mit der Shift-Abbildung, die alle Folgenglieder um einen Index verschiebt. Um dies einzusehen betrachtet man einfach $x = [n_1, n_2, n_3, \dots] \in [0, 1]$. Dann ist

$$\frac{1}{x} = n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + \dots}} \Rightarrow \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right] = \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + \dots}} \Rightarrow G(x) = [n_2, n_3, n_4, \dots].$$

Im Gegensatz zu den bisher besprochenen Shift-Abbildungen stammen die Folgenglieder hier aus der unendlichen Menge \mathbb{N} .

Mit Hilfe dieser Beobachtung können wir ein Resultat von Lagrange über Kettenbrüche (das wir hier nicht beweisen) sofort in ein Resultat über periodische Orbits der Gauß-Abbildung übersetzen. Es beschreibt Orbits von Zahlen, deren Kettenbruchdarstellung ab einem gewissen Index periodisch ist, d.h. für die ein $p \geq 1$ und ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$n_{k+p} = n_k \quad \text{für alle } k \geq N.$$

Diese Kettenbrüche nennen wir *asymptotisch periodisch*.

Satz 3.9 (i) Eine reelle Zahl besitzt genau dann eine asymptotisch periodische Kettenbruchdarstellung, wenn sie eine quadratische Irrationalzahl ist, d.h. Lösung einer quadratischen Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten.

(ii) Der Orbit von x unter der Gauß-Abbildung G ist genau dann asymptotisch periodisch, wenn $1/x$ eine quadratische Irrationalzahl ist.

Beweis von (i): siehe z.B. [Hardy/Wright: Zahlentheorie, S. 164]

Von Galois stammt das folgende Resultat, das wir wieder in einer Version für Kettenbrüche und einer Version für die Dynamik der Gauß-Abbildung angeben:

Satz 3.10

(i) Eine reelle Zahl besitzt genau dann eine periodische Kettenbruchdarstellung, wenn sie eine reduzierte quadratische Irrationalzahl ist.

Eine quadratische Irrationalzahl $r = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} > 1$ mit ganzen Zahlen $a, b, c \in \mathbb{Z}$ heißt dabei reduziert, falls die zu r konjugierte quadratische Irrationalzahl $r' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ der Ungleichung $-1 < r' < 0$ genügt.

(ii) Der Orbit von x unter der Gauß-Abbildung ist genau dann periodisch, wenn $1/x$ eine reduzierte quadratische Irrationalzahl ist.

Beweis von (i): siehe z.B. [Perron: Kettenbrüche]

Beispielsweise ist der „Goldene Schnitt“

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1 + [1, 1, 1, \dots],$$

die Lösung von $y^2 - y - 1 = 0$, ein Fixpunkt der Gauß-Abbildung und eine reduzierte quadratische Irrationalzahl.

Eine wichtige Eigenschaft chaotischer dynamischer Systeme ist die Tatsache, dass beliebig kleine Unterschiede in den Anfangsdaten verstärkt werden, bis sie „messbar“ sind. Mathematisch präzisiert hatten wir dieses Verhalten durch den Begriff der sensitiven Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen.

Lemma: Die Gauß-Abbildung G besitzt sensitive Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen, genauer:

Für alle $\varepsilon > 0$ existiert eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$ so dass man zu jedem $x \in [0, 1)$ ein $y \in [0, 1)$ findet mit

$$|x - y| \leq \varepsilon \quad \text{und} \quad |G^k(x) - G^k(y)| > 1/4.$$

Vorüberlegung: Sei x eine rationale Zahl mit Kettenbruchentwicklung $x = n_0 + [n_1, n_2, \dots, n_k]$. Dann konvergiert $G^n(x)$ offensichtlich gegen 0. Andererseits ist für N groß genug die Zahl

$$y = n_0 + [n_1, n_2, \dots, n_k, N, 1, 1, 1, \dots]$$

beliebig nahe an x und es konvergiert $G^n(y) \rightarrow [1, 1, 1, \dots] = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Beweis des Lemmas: Wegen der Approximationseigenschaft aus Lemma 3.8 findet man zu $\varepsilon > 0$ einen Index k , so dass alle Kettenbrüche, die bis zur $(k - 1)$ -ten Stelle übereinstimmen höchstens den Abstand $\varepsilon/2$ von ihrem Grenzwert haben. Insbesondere liegen die beiden Grenzwerte höchstens ε auseinander.

Indem man die Kettenbruchdarstellung ab der k -ten Stelle in $(0, 0, 0, \dots)$ bzw. in $(1, 1, 1, \dots)$ ändert, findet man zu einer Zahl x einen Punkt x_0 dessen Kettenbruchdarstellung bis zur $(k - 1)$ -ten Stelle mit der von x übereinstimmt und für den $G^k(x_0) = 0$. Genauso findet man einen Punkt x_1 mit $G^k(x_1) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Für diese Punkte gilt dann $|x - x_0| < \varepsilon$ und $|x - x_1| < \varepsilon$.

Je nachdem, ob $G^k(x)$ weiter von 0 oder von $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ entfernt ist, wählt man nun $y = x_0$ oder $y = x_1$, so dass $|G^k(x) - G^k(y)| > 1/4$. \square

Die meisten Punkte sind allerdings weder periodisch noch asymptotisch periodisch. Die Eulersche Zahl $e = 2.71828\dots$ hat beispielsweise die Darstellung

$$e = 2 + [1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \dots]$$

Wir betrachten verschiedene Teilfolgen von Iterierten:

- $G^{3N}(e) = [2(N + 1), 1, 1, \dots]$ konvergiert gegen 0,
- $G^{3N-1}(e) = [1, 2(N + 1), 1, \dots]$ und konvergiert gegen 1
- $G^{3N-2}(e) = [1, 1, 2(N + 1), \dots]$ und konvergieren gegen $1/2$.

Die ω -Limesmenge des Orbits von e ist also $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ und ist in diesem Fall nicht invariant, da die Abbildung Unstetigkeiten besitzt.

3.4.4 Addiermaschine

Ein weiteres Beispiel für symbolische Dynamik mit einer ebenfalls komplizierten, aber vom Shift verschiedenen Dynamik. Wir fassen diesmal Ω_2^+ als den Raum der 0–1–Folgen. Die Abbildung $\alpha_2 : \Omega_2^+ \rightarrow \Omega_2^+$ definiert durch

$$(\alpha_2\omega)_i = \begin{cases} 1 - \omega_i & \text{falls } \omega_i = 1 \quad \forall j < i \\ \omega_i & \text{sonst} \end{cases}$$

heißt **binäre Addiermaschine**, da sie formal wie die binäre Addition mit Übertrag von ω (aufgefasst als Binärzahl $\dots\omega_3\omega_2\omega_1$ und 1 operiert:

$$(1, 1, 1, \dots, 1, 0, \omega_n, \omega_{n+1}, \dots) \mapsto (0, 0, 0, \dots, 0, 1, \omega_n, \omega_{n+1}, \dots)$$

Lemma:

- (i) α_2 besitzt keine periodischen Orbits.
- (ii) Alle Orbits von α_2 liegen dicht in Ω_2^+ .
- (iii) α_2 besitzt keine sensitive Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen.

Beweis:

- (i) Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass ω unendlich viele Nullen enthält. Falls ω nur endlich viele Nullen enthält, dann ist nach einer endlichen Anzahl von Iterationen die Folge $(1, 1, 1, \dots)$ erreicht und im nächsten Schritt dann die Folge $(0, 0, 0, \dots)$ mit unendlich vielen Nullen.

In jedem Iterationsschritt ändert sich die Folge nur bis zur ersten auftretenden Null, der Rest bleibt unverändert. Sei daher p die Periode eines möglichen periodischen Orbits, dann stimmen alle Folgenglieder der Punkte des periodischen Orbits ab der $(p + 1)$ -ten Null überein, die Addiermaschine operiert also nur auf endlich vielen Stellen. Wir fassen nun die Folgen wieder als Binärzahlen auf. Da die Addiermaschine eine streng monoton wachsende Folge erzeugt, kann diese nicht periodisch sein.

- (ii) Eine Folge ist dicht in Ω_2^+ , falls für jeden endlichen Anfangsabschnitt $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_k)$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$\alpha_2^N(\omega) = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_k, \dots).$$

Das ist leicht einzusehen, wenn man in zwei Schritten argumentiert. Zunächst kann man durch eine gewisse Anzahl n von Iterationen erreichen, dass

$$\alpha_2^n(\omega) = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_k, \dots).$$

k Nullen

Durch weitere Iterationen erreicht man dann, dass auf den ersten k Stellen genau die gewünschte Folge steht.

- (iii) Falls zwei Folgen ω und $\hat{\omega}$ geringen Abstand haben, dann stimmen sie auf einem Abschnitt der Länge k überein. Man sieht leicht ein, dass auch für alle Iterierten dann die ersten k Glieder übereinstimmen, der Abstand der Iterierten wird daher nicht größer werden als 2^{-k} .

Bemerkung: Die Abbildung f_∞ , die in den Übungsaufgaben 16/17 durch unendlich häufige Anwendung des Verdopplungsoperators konstruiert wird, besitzt (neben periodischen Orbits der Perioden $2, 2^2, 2^3, 2^4, \dots$) eine invariante Menge I_∞ auf der f_∞ topologisch konjugiert zu α_2 ist.

Ähnlich besitzt die logistische Abbildung f_{λ_∞} mit $\lambda_\infty = 3.839\dots$ am Ende der Periodenverdopplungskaskade periodische Orbits der Periode $2, 2^2, 2^3, 2^4, \dots$ und eine invariante Menge, auf der f_{λ_∞} topologisch konjugiert zu α_2 ist.

3.5 Knettheorie

Definition: Eine C^1 -Abbildung $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ heißt **unimodal**, falls $f(0) = f(1) = 0$ und ein $c \in (0, 1)$ existiert, so dass f auf $[0, c)$ streng monoton wachsend und auf $(c, 1]$ streng monoton fallend ist. Wir nennen c den **kritischen Punkt** von f . Wir können nun jedem Orbit $(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge $\gamma(x) = (\gamma_0, \gamma_1, \dots)$, den *Weg* von x , zuordnen vermöge

$$\gamma_n = \begin{cases} \text{L} & \text{falls } f^n(x) \in [0, c) \\ \text{C} & \text{falls } f^n(x) = c \\ \text{R} & \text{falls } f^n(x) \in (c, 1] \end{cases}$$

Dabei steht natürlich ‘L’ für Links und ‘R’ für Rechts und ‘C’ für Critical point. Die Folge $\nu(f) := \gamma(c)$ nennen wir die **Knet-Invariante** von f .

Man sieht leicht ein, dass die Knetinvariante unter topologischer Konjugation erhalten bleibt: Falls $f = \Phi^{-1} \circ g \circ \Phi$ mit einem orientierungserhaltenden Homöomorphismus Φ , so ist $\nu(f) = \nu(g)$. Wie schon bei der logistischen Abbildung f_λ mit $\lambda > 2 + \sqrt{5}$ kann man auch für andere Startwerte Wegabbildungen zuordnen.

Beispiel: Nicht alle Folgen treten bei einem gegebenen f als Wege auf. Beispielsweise besitzt die logistische Abbildung f_λ mit $2 < \lambda < 3$ einen stabilen Fixpunkt $x_* > 1/2 = c$. Daher ist die Knetinvariante $(\text{C}, \overline{\text{R}})$ wobei $\overline{\text{R}}$ für eine unendliche Folge von R’s steht. Als Wege von anderen Startwerten können noch die Folgen $(\overline{\text{L}})$, $(\overline{\text{R}})$, $(\text{L}, \overline{\text{R}})$, $(\text{L}, \text{C}, \overline{\text{R}})$, $(\text{L}, \text{L}, \overline{\text{R}})$, $(\text{L}, \text{L}, \text{C}, \overline{\text{R}})$, ... sowie $(\text{R}, \overline{\text{L}})$, $(\text{R}, \text{L}, \overline{\text{R}})$, $(\text{R}, \text{L}, \text{C}, \overline{\text{R}})$, $(\text{R}, \text{L}, \text{L}, \overline{\text{R}})$, $(\text{R}, \text{L}, \text{L}, \text{C}, \overline{\text{R}})$, ... auftreten. Alle anderen Folgen kommen nicht als Wege vor.

Auf dem Raum dieser Folgen kann man eine totale Ordnung einführen:

Definition: Zunächst definieren wir als Ordnung der drei Symbole $\text{L} \prec \text{C} \prec \text{R}$. Seien γ und $\hat{\gamma}$ zwei Folgen, die bis zum $(i - 1)$ -ten Glied übereinstimmen und für die $\gamma_i \neq \hat{\gamma}_i$. Es ist dann $\gamma \prec \hat{\gamma}$, falls

- (i) die Anzahl der R’s in $\{\gamma_1, \dots, \gamma_{i-1}\}$ gerade ist und $\gamma_i \prec \hat{\gamma}_i$, oder
- (ii) die Anzahl der R’s in $\{\gamma_1, \dots, \gamma_{i-1}\}$ ungerade ist und $\gamma_i \succ \hat{\gamma}_i$.

Andernfalls ist $\gamma \succ \hat{\gamma}$.

Beispiel:

$$\begin{aligned} (\text{R}, \text{L}, \text{L}, \text{R}, \dots) &\prec (\text{R}, \text{L}, \text{L}, \text{C}, \dots) \prec (\text{R}, \text{L}, \text{L}, \text{L}, \dots) \quad \text{und} \\ (\text{L}, \text{R}, \text{R}, \text{L}, \dots) &\prec (\text{L}, \text{R}, \text{R}, \text{C}, \dots) \prec (\text{L}, \text{R}, \text{R}, \text{R}, \dots) \end{aligned}$$

Unter allen Folgen die „kleinste“ ist die Folge $(\text{L}, \text{L}, \text{L}, \text{L}, \dots)$, die immer als Weg $\gamma(0)$ auftritt. Die „größte“ Folge ist $\gamma(1) = (\text{R}, \text{L}, \text{L}, \text{L}, \dots)$.

Die Ordnung auf den Symbolfolgen und die Ordnung der Anfangswerte in $[0, 1]$ hängen eng miteinander zusammen.

Satz 3.11 Falls f unimodal ist und $\gamma(x) \prec \gamma(y)$, dann ist $x < y$.

Beweis: Vollständige Induktion nach dem kleinsten Index i , für den $\gamma_i(x) \neq \gamma_i(y)$.

Induktionsanfang: Falls $i = 0$, dann ist die Aussage richtig, denn die Ordnung $L \prec C \prec R$ der Symbole entspricht der natürlichen Ordnung auf dem Intervall $[0, 1]$.

Induktionsschritt: Sei $i \geq 1$ der kleinste Index, bei dem sich die beiden Folgen unterscheiden und sei das Lemma für $i - 1$ bereits bewiesen. Wir unterscheiden zwei Fälle, anhand derer man gut erkennen kann, warum bei der Definition der Ordnung \prec ebenfalls zwei Fälle unterschieden wurden.

1. Fall: $\gamma_0(x) = \gamma_0(y) = L$

Da $\gamma_j(f(x)) = \gamma_{j+1}(x)$ ist, stimmt die Anzahl der R's in den Tupeln $(\gamma_1(x), \dots, \gamma_{i-1}(x))$ und $(\gamma_0(f(x)), \dots, \gamma_{i-2}(f(x)))$ überein. Die Folgen $\gamma(f(x))$ und $\gamma(f(y))$ sind daher genauso angeordnet bezüglich \prec wie die Folgen $\gamma(x)$ und $\gamma(y)$. Nach Voraussetzung ist also $\gamma(f(x)) \prec \gamma(f(y))$. Die beiden Folgen $\gamma(f(x))$ und $\gamma(f(y))$ unterscheiden sich an der $(i - 1)$ -ten Stelle. Nach Induktionsvoraussetzung ist daher $f(x) < f(y)$. Da f streng monoton steigend ist auf $[0, c]$, folgt daraus sofort $x < y$.

2. Fall: $\gamma_0(x) = \gamma_0(y) = R$

Auch in diesem Fall ist $\gamma_j(f(x)) = \gamma_{j+1}(x)$. Die beiden Folgen $\gamma(f(x))$ und $\gamma(f(y))$ unterscheiden sich das erste Mal an der $(i - 1)$ -ten Stelle. Allerdings enthält das Tupel $(\gamma_0(f(x)), \dots, \gamma_{i-2}(f(x)))$ ein R weniger als $(\gamma_0(x), \dots, \gamma_{i-1}(x))$. Ebenso enthält das Tupel $(\gamma_0(f(y)), \dots, \gamma_{i-2}(f(y)))$ ein R weniger als $(\gamma_0(y), \dots, \gamma_{i-1}(y))$.

Aus diesem Grund sind $\gamma(f(x))$ und $\gamma(f(y))$ bezüglich \prec umgekehrt angeordnet wie die Folgen $\gamma(x)$ und $\gamma(y)$, d.h. es ist $\gamma(f(x)) \succ \gamma(f(y))$ und nach Induktionsvoraussetzung dann $f(x) > f(y)$. Da f streng monoton fallend ist auf $[c, 1]$, folgt daraus ebenfalls $x < y$.

□

Satz 3.12 Falls f unimodal und $x \leq y$ ist, dann gilt $\gamma(x) \preceq \gamma(y)$.

Beweis: Wir argumentieren indirekt. Sei $\gamma(x) \not\preceq \gamma(y)$. Da \prec eine Totalordnung ist, ist dann $\gamma(y) \prec \gamma(x)$. Aus dem vorigen Lemma folgt daher $y < x$, ein Widerspruch. □

Bemerkung: Die Menge $I(x) = \{y \in [0, 1]; \gamma(y) = \gamma(x)\}$ ist ein (möglicherweise entartetes) Intervall, denn falls $x_1 \leq x \leq x_2$ mit $\gamma(x_1) = \gamma(x_2)$, dann ist $\gamma(x_1) \preceq \gamma(x)$ und $\gamma(x) \preceq \gamma(x_2)$, und daher $\gamma(x) = \gamma(x_1) = \gamma(x_2)$.

Außerdem ist die Einschränkung von f^n auf ein solches Intervall $I(x)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine monotone Funktion (freiwillige Übungsaufgabe!).

Bis jetzt hatten wir noch nicht darüber nachgedacht, ob eine gegebene Folge überhaupt als Symbolfolge $\gamma(x)$ eines Punktes x auftritt. Wir notieren zunächst eine notwendige Bedingung an $\gamma(x)$:

Lemma: Falls $\alpha = \gamma(x)$ ist für ein $x \in [0, 1]$, dann gilt:

(i) $\alpha_j = C \Rightarrow \sigma^j(\alpha) = \nu$ und

(ii) $\sigma^j(\alpha) \preceq \sigma(\nu)$ für alle $j \geq 1$.

Beweis:

(i) Falls $\alpha_j = \mathbf{C}$, dann ist $f^j(x) = c$ und damit $\sigma^j(\alpha) = \sigma^j(\gamma(c)) = \gamma(f^j(x)) = \nu$.

(ii) Da f sein Maximum im Punkt c annimmt, ist sicher $f^j(x) \leq f(c)$ für $j = 1, 2, \dots$ und daher wegen Satz 3.12

$$\sigma^j(\alpha) = \gamma(f^j(x)) \preceq \gamma(f(c)) = \sigma(\nu).$$

□

Der nächste Satz sagt, dass diese Bedingung hinreichend wird, wenn wir noch zwei zusätzliche Voraussetzungen fordern:

Satz 3.13 Sei $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ eine unimodale Abbildung mit Knetinvariante $\nu(f)$. Falls c kein periodischer Punkt ist und die Folge α die Bedingungen

(i) $\alpha_j \neq \mathbf{C}$ für alle $j \geq 0$

(ii) $\sigma^j(\alpha) \prec \sigma(\nu)$ für alle $j \geq 1$

erfüllt, dann ist $\alpha = \gamma(x_0)$ für ein $x_0 \in [0, 1]$.

Beweis: Wir argumentieren indirekt und nehmen an, dass die Folge α nicht realisiert wird.

Dann sind die Mengen

$$L_\alpha := \{x \in [0, 1]; \gamma(x) \prec \alpha\}$$

und

$$R_\alpha := \{x \in [0, 1]; \alpha \prec \gamma(x)\}$$

Intervalle und es gilt:

- $0 \in L_\alpha$ sowie $1 \in R_\alpha$,
- $L_\alpha \cup R_\alpha = [0, 1]$.

Wir zeigen, dass das unmöglich ist, da sowohl L_α als auch R_α offen in $[0, 1]$ sind. Daraus ergibt sich jedoch ein Widerspruch, denn das Intervall $[0, 1]$ ist zusammenhängend.

Zeige nur: L_α ist offen. (Der Beweis für R_α geht genauso.)

Sei dazu $x \in L_\alpha$ mit dem zugehörigen Weg $\gamma(x) =: \beta \prec \alpha$. Wir möchten beweisen, dass für alle y in einer Umgebung von x auch $\gamma(y) \prec \alpha$ ist.

Da α nicht realisiert wird, finden wir einen Index n , so dass $\alpha_i = \beta_i$ für $i = 0, 1, \dots, n-1$ und $\alpha_n \neq \beta_n$.

Unterscheide nun drei Fälle:

1. Fall: $\beta_i \neq \mathbf{C}$ für alle $i \leq n$

Wegen der Stetigkeit von f, f^2, \dots, f^n ändert sich der Weg nicht, wenn man den Anfangswert leicht verändert. Falls also $|y - x|$ klein genug ist, dann ist $\gamma_i(y) = \beta_i$ für $i = 0, 1, 2, \dots, n$. Daher ist auch $\gamma(y) \prec \alpha$ und somit $y \in L_\alpha$.

2. Fall: $\beta_i = \mathbf{C}$ für ein $i < n$

In diesem Fall ist $\alpha_i = \beta_i = \mathbf{C}$ im Widerspruch zu unserer Voraussetzung $\alpha_i \neq \mathbf{C}$. Also kann dieser Fall gar nicht eintreten.

3. Fall: $\beta_n = \mathbf{C}$ und $\alpha_n \neq \mathbf{C}$

In diesem Fall ist $\nu(f) = (\mathbf{C}, \beta_{n+1}, \beta_{n+2}, \dots)$ und $\beta_{n+i} \neq \mathbf{C}$, da wir vorausgesetzt hatten, dass c kein periodischer Punkt ist.

Die Folgen β und α müssen sich noch an einer weiteren Stelle unterscheiden, da sonst $\sigma^{n+1}(\alpha) = \sigma(\nu)$ wäre im Widerspruch zu Voraussetzung (ii).

Es existiert also ein $k \geq 1$ mit $\alpha_{n+k} \neq \beta_{n+k}$. Setze nun

$$U := \{y \in [0, 1]; \gamma_i(y) = \beta_i \text{ für } 0 \leq i < n \text{ und } n < i \leq n+k\}.$$

Dann ist zunächst $x \in U$. Außerdem ist U offen, da es Schnittmenge von offenen Mengen (in der induzierten Topologie) ist:

$$U = \bigcap_{0 \leq i \leq n+k, i \neq n} f^{-i}(J_i) \quad \text{mit} \quad J_i = \begin{cases} [0, c), & \beta_i = \mathbf{L} \\ (c, 1], & \beta_i = \mathbf{R} \end{cases}$$

Also ist U eine Umgebung von x .

Es bleibt zu zeigen, dass für $y \in U$ tatsächlich $\gamma(y) \prec \alpha$ ist. Zwei Möglichkeiten sind dabei zu unterscheiden:

1. Falls $\gamma_n(y) \neq \alpha_n$, dann folgt die gewünschte Ungleichung aus der Ungleichung $\beta \prec \alpha$, da auch diese Folgen sich an der n -ten Stelle unterscheiden. Es ist dann entweder $\gamma_n(y) = \mathbf{C}$ oder $\gamma_n(y) = \hat{\alpha}_n$, wobei $\hat{\mathbf{L}} = \mathbf{R}$ und $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{L}$. Da bei der Anordnung von drei Folgen, die auf den ersten $n-1$ Gliedern übereinstimmen und sich paarweise an der n -ten Stelle unterscheiden die Folge mit dem Symbol \mathbf{C} in der Mitte steht gilt

$$(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}, \hat{\alpha}_n, \dots) \prec (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}, \mathbf{C}, \dots) \prec (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}, \alpha_n, \dots).$$

2. Falls $\gamma_n(y) = \alpha_n$, dann benutzen wir die Voraussetzung $\sigma^{n+1}(\alpha) \prec \sigma(\nu)$, also

$$(*) \quad (\alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \dots) \prec (\beta_{n+1}, \beta_{n+2}, \dots).$$

Aus der Relation $\beta \prec \alpha$ folgt, dass die Anzahl der \mathbf{R} 's in $\{\alpha_0, \dots, \alpha_n\}$ ungerade sein muss. Entweder ist die Anzahl der \mathbf{R} 's in $\{\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}\}$ gerade, dann ist $\alpha_n = \mathbf{R}$, oder die Anzahl der \mathbf{R} 's in $\{\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}\}$ ist ungerade, dann muss $\alpha_n = \mathbf{L}$ sein. Daher folgt in jedem Fall aus (*) die Ungleichung

$$(\gamma_0, \gamma_1, \dots) = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_{n+1}, \dots, \beta_{n+k}, \gamma_{n+k+1}, \dots) \prec (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n+k}, \dots)$$

es ist also immer $\gamma(y) \prec \alpha$ für alle $y \in U$.

□

Bemerkung: Mit etwas mehr Arbeit kann man die Voraussetzung, dass der Orbit von c nicht periodisch ist, loswerden.

Für unimodale Abbildungen kann man mit Hilfe der Knettheorie das folgende Resultat beweisen, das wieder die beiden Haupteigenschaften komplizierter Dynamik (Rekurrenz und sensitive Abhängigkeit von Startwerten) enthält.

Satz 3.14 (Periode 3 \Rightarrow „Chaos“, 2. Version, Collet-Eckmann S.93) Sei f eine unimodale C^1 -Abbildung, die einen periodischen Punkt der Periode 3 besitzt. Dann existiert eine überabzählbare Menge S von Punkten und eine $\varepsilon > 0$, so dass für beliebige $x, y \in S$, $x \neq y$ gilt:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |f^n(x) - f^n(y)| \geq \varepsilon$$

und

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} |f^n(x) - f^n(y)| = 0.$$

Beweisidee: Seien $x_1 < x_2 < x_3$ die Punkte auf dem 3-periodischen Orbit. Man prüft sofort nach, dass $f(x_1) = x_2$ und $f(x_2) = x_3$, sonst kann f nicht unimodal sein.

Drei Fälle können eintreten:

$x_1 < c < x_2$, $c = x_2$ und $x_2 < c < x_3$.

Wir behandeln nur den ersten Fall. Der dritte Fall lässt sich durch die Transformation $\tilde{f}(x) = f(1-x)$ auf den ersten Fall zurückführen, der zweite Fall ist beweistechnisch sehr ähnlich zum ersten Fall.

Aus $f(x_2) < f(c)$ folgt für die Knetinvariante $(RLR)^\infty \preceq \sigma(\nu)$.

Betrachte alle Symbolfolgen der Form $RLR^{p_1}LR^{p_2}LR^{p_3} \dots$ mit $p_i \geq 3$ und $p_i \rightarrow \infty$.

Alle solchen Folgen werden als Wege realisiert. Das folgt aus Satz 3.13 und der anschließenden Bemerkung.

Zeige dazu: Für $\alpha = RLR^{p_1}LR^{p_2}LR^{p_3} \dots$ ist $\sigma^j(\alpha) \prec (RLR)^\infty \preceq \sigma(\nu)$.

- Falls $\sigma^j(\alpha)$ mit dem Symbol L beginnt, ist alles klar.
- Falls $\sigma^j(\alpha)$ mit den Symbolen R, R beginnt, ist auch nichts zu zeigen.
- Falls $\sigma^j(\alpha)$ mit den Symbolen R, L, ... beginnt, dann folgen mindestens drei R's und wegen

$$R, L, R, R, R, \dots \prec (R, L, R, R, L, \dots)$$

gilt auch in diesem Fall die Ungleichung.

Die Startwerte, die diese Folgen realisieren, bilden eine überabzählbare Menge. Allerdings müssen wir diese Menge noch etwas einschränken. Bisher kann es beispielsweise vorkommen, dass zwei solche Folgen ab einem bestimmten Index völlig übereinstimmen.

Was bedeutet eine lange Folge von R's überhaupt ?

Wir wollen plausibel machen, dass dann viele Iterierte $f^n(x)$ nicht in einer kleinen Umgebung von c liegen können. Zunächst können Punkte, deren Weg mit drei R's beginnt, nicht in einer Umgebung von c liegen. Punkte in der Nähe von c haben nämlich einen Weg, der mit *R, L beginnt, wobei * für ein beliebiges Symbol steht. Insbesondere stellt man so sicher, dass ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass für alle x, y mit $\gamma(x) = (L, R, R, \dots)$ und

$\gamma(y) = (R, R, R, \dots)$ die Ungleichung $|x - y| > \varepsilon$ gilt. Auf diese Weise wird die Lim-Sup-Bedingung erfüllt.

Nun kann man beispielsweise so vorgehen: Markiere unendlich viele Indizes i_1, i_2, \dots mit $i_{k+1} - i_k \rightarrow \infty$. Setze $\gamma_i = R$ für $i \notin \{i_1, i_2, \dots\}$ und $\gamma_i = R$ oder L für $i = i_1, i_2, \dots$. So erhält man überabzählbar viele Folgen, die alle als Wege realisiert werden. Wähle zu jeder Folge ein x , und weise dann nach, dass die Menge dieser Punkte tatsächlich die geforderten Eigenschaften hat. \square

Die Knetinvariante dient auch zur Klassifikation von unimodalen Abbildungen:

Satz 3.15 (ohne Beweis) *Seien $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ unimodale Abbildungen mit derselben Knetinvariante. Seien außerdem die Mengen der Urbilder von c unter f bzw. g dicht in $[0, 1]$. Dann sind f und g zueinander C^0 -konjugiert. Mit anderen Worten, solche Abbildungen sind durch ihre Knetinvariante (bis auf einen Homöomorphismus) eindeutig bestimmt.*

Eine weitere Anwendung der Knet-Invariante sei hier nur kurz ohne Beweis vorgestellt.

Definition: Eine Familie von unimodalen Abbildungen $f_\lambda : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ mit $\lambda \in [a, b]$ heißt **vollständige Familie**, falls es zu jeder unimodalen Funktion $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ein λ gibt, so dass für die Knetinvarianten gilt: $\nu(g) = \nu(f_\lambda)$.

Satz 3.16 (ohne Beweis, de Melo/van Strien, Hasselblatt/Katok Thm.16.4.2)
Die Familie f_λ ist vollständig, falls $\nu(f_a) = (C, L, L, L, \dots)$ und $\nu(f_b) = (C, R, L, L, \dots)$.

Beispiel: Die quadratische Familie $f_\lambda(x) = \lambda x(1 - x)$ mit $\lambda \in [0, 4]$ ist vollständig.

3.6 Verzweigungen

Als Vorgriff auf ein etwas systematischeres Kapitel später beschreiben wir hier drei einfache *Verzweigungen*, die durch die Familie logistischer Abbildungen motiviert sind.

Allgemein versteht man unter einem *Verzweigungspunkt* in einer Familie $f(x, \lambda)$ von diskreten dynamischen Systemen einen Parameterwert λ_* , in dessen Umgebung das dynamische System sein Verhalten ändert. Was man mit „unterschiedlichem“ Verhalten genau meint, muss man in der Regel noch präzisieren.

In diesem Abschnitt wollen wir nur die Verzweigung von Fixpunkten und periodischen Punkten betrachten. Insbesondere geht es dabei darum, Änderungen sowohl der Anzahl als auch der Stabilität systematisch zu entdecken.

Sei also konkret $f : [0, 1] \times \Lambda \rightarrow [0, 1]$ eine Familie von Intervallabbildungen, die von einem Parameter $\lambda \in \Lambda \subseteq \mathbb{R}$ abhängt.

Fixpunkte von f erfüllen die Gleichung $x = f(x, \lambda)$, entsprechen also Nullstellen der Funktion $F : [0, 1] \times \Lambda \rightarrow [0, 1]$ mit $F(x, \lambda) = f(x, \lambda) - x$.

Falls x_0 ein Fixpunkt von $f(\cdot, \lambda_0)$ ist, dann ist $F(x_0, \lambda_0) = 0$.

Wenn außerdem noch $F_x(x_0, \lambda_0) := \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, \lambda_0) \neq 0$ gilt, dann finden wir mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen lokal (d.h. für x nahe x_0) eine Funktion $x_*(\lambda)$ mit den Eigenschaften

- $x_*(\lambda_0) = x_0$ und
- $F(x_*(\lambda), \lambda) = 0$.

Was passiert nun, wenn der Satz über implizite Funktionen sich nicht anwenden lässt, also für $F_x(x_0, \lambda_0) = 0$, bzw. für $f_x(x_0, \lambda_0) = 1$?

Das hängt ganz wesentlich von Termen höherer Ordnung in der Taylor-Entwicklung von f um (x_0, λ_0) ab.

Im einfachsten Fall existiert immer noch eine eindeutige Kurve von Fixpunkten, diese lässt sich allerdings nicht mehr über λ parametrisieren.

Satz 3.17 (Saddle-Node Verzweigung)

Sei $f : [0, 1] \times \Lambda \rightarrow [0, 1]$ zweimal stetig differenzierbar und $f(x_0, \lambda_0) = x_0$ ein Fixpunkt mit $f_x(x_0, \lambda_0) = 1$. Falls außerdem die Bedingungen

(i) $f_\lambda(x_0, \lambda_0) \neq 0$ und

(ii) $f_{xx}(x_0, \lambda_0) \neq 0$

erfüllt sind, dann existiert in der Nähe von (x_0, λ_0) eine Kurve von Fixpunkten, die sich parametrisieren lässt als $\lambda = \lambda_F(x)$ mit $\lambda'_F(0) = 0$ und $\lambda''_F(0) \neq 0$. Von den beiden Halbüsten mit $x < x_0$ bzw. $x > x_0$ besteht einer aus stabilen und einer aus instabilen Fixpunkten.

Beweis: Die Voraussetzungen an f lassen sich wie folgt in Eigenschaften von F übersetzen:

$$\begin{aligned} f(x_0, \lambda_0) = x_0 &\Rightarrow F(x_0, \lambda_0) = 0 \\ f_x(x_0, \lambda_0) = 1 &\Rightarrow F_x(x_0, \lambda_0) = 0 \\ f_\lambda(x_0, \lambda_0) \neq 0 &\Rightarrow F_\lambda(x_0, \lambda_0) \neq 0 \\ f_{xx}(x_0, \lambda_0) \neq 0 &\Rightarrow F_{xx}(x_0, \lambda_0) \neq 0 \end{aligned}$$

Die dritte Zeile zeigt, dass wir mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen die Gleichung $F(x, \lambda) = 0$ lokal nahe λ_0 eindeutig nach λ auflösen können. Dies liefert einen Zweig $\lambda = \lambda_F(x)$ von Fixpunkten mit $\lambda_F(x_0) = \lambda_0$ und

$$\lambda'_F(x_0) = -\frac{F_x(x_0, \lambda_0)}{F_\lambda(x_0, \lambda_0)} = 0.$$

Aus der Identität $F(x, \lambda_F(x)) \equiv 0$ folgt $\frac{d^2}{dx^2} F(x, \lambda_F(x)) \equiv 0$, d.h.

$$\begin{aligned} F_\lambda(x, \lambda_F(x)) \cdot \lambda''_F(x) + F_{\lambda\lambda}(x, \lambda_F(x)) \lambda'^2_F(x) + 2F_{x\lambda}(x, \lambda_F(x)) \lambda'_F(x) + F_{xx}(x, \lambda_F(x)) &= 0 \\ \Rightarrow \lambda''_F(x) = -\frac{F_{xx}(x_0, \lambda_0)}{F_\lambda(x_0, \lambda_0)} &\neq 0 \end{aligned}$$

Nahe λ_0 existieren Fixpunkte also entweder für $\lambda \leq \lambda_0$ oder für $\lambda \geq \lambda_0$.

Um die Stabilität der Fixpunkte zu bestimmen, berechnen wir mit Hilfe des Mittelwertsatzes

$$F_x(x, \lambda_F(x)) = F_x(x, \lambda_F(x)) - F_x(x_0, \lambda_0) = (x - x_0) \cdot (F_{xx}(\xi, \lambda_F(\xi)) + F_{x\lambda}(\xi, \lambda_F(\xi)) \lambda'_F(\xi))$$

mit ξ zwischen x und x_0 . Wegen $\lambda'_F(x_0) = 0$ und $F_{xx}(x_0, \lambda_0) \neq 0$ ist der Ausdruck in der Klammer von Null verschieden in einer Umgebung von x_0 . Insbesondere wechselt daher $F_x(x, \lambda_F(x))$ bei x_0 sein Vorzeichen. Dies bedeutet, dass einer der Halbbäste mit $x > x_0$ und $x < x_0$ aus asymptotisch stabilen Fixpunkten, der andere aus asymptotisch instabilen Fixpunkten besteht. \square

Bemerkung:

1. Die Voraussetzungen $f_\lambda(x_0, \lambda_0) \neq 0$ und $f_{xx}(x_0, \lambda_0) \neq 0$ sind *generisch*, d.h. sie sind typischerweise erfüllt.
2. Die Annahme $f_x(x_0, \lambda_0) = 0$ wird typischerweise in einzelnen isolierten Punkten entlang einer Kurve von Fixpunkten erfüllt sein. Man erwartet Saddle-Node-Verzweigungen daher schon in Systemen mit einem Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$. In der Singularitätentheorie wird diese Tatsache präzisiert durch den Begriff der *Kodimension*. Sie gibt an, wie viele unabhängige Parameter ein „typisches“ System besitzen muss, damit eine bestimmte Verzweigung darin vorkommen kann. Die Saddle-Node-Verzweigung ist daher eine Verzweigung der *Kodimension 1*.
3. Andere Bezeichnungen sind *Sattel-Knoten-Verzweigung*, *turning point* und *blue sky bifurcation* (weil bei $\lambda = \lambda_0$ „aus dem Nichts“ neue Fixpunkte auftauchen).
4. Das alles geht auch in höheren Dimension, sogar in Banachräumen. Dann muss man nur zuerst den eindimensionalen Unterraum finden, in dessen Umgebung genau das passiert, was Satz 3.17 beschreibt. Mehr dazu im Sommersemester in der Vorlesung Verzweigungstheorie von Stefan Liebscher.

Eine andere Verzweigung haben wir bei der logistischen Familie f_λ schon beobachtet: Bei $\lambda = 1$ schneiden sich hier zwei Zweige von Fixpunkten und wechseln ihre Stabilität. Dieses Verhalten beschreibt der folgende Satz.

Satz 3.18 (Transkritische Verzweigung) Sei $f : [0, 1] \times \Lambda \rightarrow [0, 1]$ zweimal stetig differenzierbar und $f(0, \lambda) = 0$ für alle λ . Falls $f_x(0, \lambda_0) = 1$. Falls außerdem die Bedingungen

$$(i) \quad f_{x\lambda}(0, \lambda_0) > 0 \text{ und}$$

$$(ii) \quad f_{xx}(0, \lambda_0) \neq 0$$

erfüllt sind, dann existiert in der Nähe von $(0, \lambda_0)$ eine Kurve von Fixpunkten, die sich parametrisieren lässt als $x = x_F(\lambda)$ mit $x'_F(\lambda_0) \neq 0$. Der triviale Ast $x = 0$ von Fixpunkten ist stabil für λ_0 .

Ein analoger Satz gilt natürlich auch für $f_\lambda(0, \lambda_0) < 0$.

Beweis: siehe Übungsaufgabe

Als letztes untersuchen wir noch den Fall, dass zwar ein eindeutiger Ast von Fixpunkten $x_*(\lambda)$ existiert, jedoch die Stabilität bei $\lambda = \lambda_0$ wechselt. Der folgende Satz besagt, dass dies typischerweise mit dem Auftreten eines 2-periodischen Orbits verbunden ist.

Satz 3.19 (Flip-Verzweigung, Periodenverdopplung) Sei $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dreimal stetig differenzierbar und sei (x_0, λ_0) ein Fixpunkt von f mit $f_x(x_0, \lambda_0) = -1$. Falls außerdem die Bedingungen

$$(i) \quad 2f_{x\lambda}(x_0, \lambda_0) + f_\lambda(x_0, \lambda_0) \cdot f_{xx}(x_0, \lambda_0) \neq 0 \text{ und}$$

$$(ii) \quad 2f_{xxx}(x_0, \lambda_0) + 3f_{xx}^2(x_0, \lambda_0) \neq 0$$

erfüllt sind, dann existiert in der Nähe von (x_0, λ_0) ein Zweig von 2-periodischen Punkten, der sich parametrisieren lässt als $x = x_P(\lambda)$ mit $x'_P(\lambda_0) = 0$ und $x''_P(\lambda_0) \neq 0$.

Beweis: Der Satz über implizite Funktionen liefert einen Zweig $x = x_F(\lambda)$ von Fixpunkten in der Nähe von (x_0, λ_0) .

Setze nun

$$g(x, \lambda) := f(f(x + x_F(\lambda), \lambda), \lambda) - x - x_F(\lambda).$$

Dann ist

$$g(0, \lambda) = f(\underbrace{f(x_F(\lambda), \lambda)}_{=x_F(\lambda)}, \lambda) - x_F(\lambda) = 0$$

d.h. $x = 0$ ist Fixpunkt von g für alle λ . Weiter gilt:

$$f(f(x, \lambda), \lambda) = x \Rightarrow g(x - x_F(\lambda), \lambda) = 0$$

Auch 2-periodische Punkte von f entsprechen also Nullstellen von g . Aus der Definition von g berechnet man leicht

$$\begin{aligned} g_x(0, \lambda_0) &= 0 \\ g_{xx}(0, \lambda_0) &= 0 \\ g_{xxx}(0, \lambda_0) &= -2f_{xxx}(x_0, \lambda_0) - 3f_{xx}^2(x_0, \lambda_0) \\ g_{x\lambda}(0, \lambda_0) &= -2f_{x\lambda}(x_0, \lambda_0) - f_\lambda(x_0, \lambda_0)f_{xx}^2(x_0, \lambda_0). \end{aligned}$$

Wegen $g(0, \lambda) \equiv 0$ können wir g schreiben als

$$g(x, \lambda) = x \cdot \tilde{g}(x, \lambda)$$

mit $\tilde{g} \in C^2$. Es gilt dann

$$\begin{aligned} 0 = g_x(0, \lambda_0) &= \tilde{g}(0, \lambda_0) \\ g_{x\lambda}(x, \lambda) &= \tilde{g}_\lambda(x, \lambda) + x\tilde{g}_{x\lambda}(x, \lambda) \\ \Rightarrow \tilde{g}_\lambda(0, \lambda_0) &= -2f_{x\lambda}(x_0, \lambda_0) - f_\lambda(x_0, \lambda_0)f_{xx}^2(x_0, \lambda_0) \neq 0. \end{aligned}$$

Ganz analog zeigt man $\tilde{g}_{xx}(0, \lambda_0) = \frac{1}{2}g_{xxx}(0, \lambda_0) \neq 0$. Es liegt also für \tilde{g} eine Saddle-Node-Verzweigung vor. Der Lösungszweig für $\tilde{g} = 0$ besteht nach Konstruktion aus 2-periodischen Punkten für f . Diese sind auch wirklich 2-periodisch (d.h. keine Fixpunkte) für f , denn alle Fixpunkte liegen auf dem Ast $x_f(\lambda)$. \square