4 Grundbegriffe der Ergodentheorie

In der Ergodentheorie wird versucht, das asymptotische Verhalten der Trajektorien eines dynamischen Systems statistisch zu beschreiben. Dabei greift man oft auf Werkzeuge und Sätze aus der Maßtheorie zurück und benutzt diese, um Aussagen über das Verhalten von "typischen" Trajektorien zu treffen. Allerdings betreiben wir hier keine Maßtheorie und lassen daher einige Details weg, die man ggf. in Lehrbüchern über Maßtheorie oder Ergodentheorie nachlesen kann.
Insbesondere sei dabei auf die Bücher von Denker und Hasselblatt/Katok verwiesen.

4.1 Das Wichtigste aus der Maßtheorie

Definition: Sei X eine Menge. Wir nennen ein System $\mathcal{B}$ von Teilmengen von X eine $\sigma-$**Algebra**, falls gilt:

(1) $\emptyset \in \mathcal{B}$,

(2) $B \in \mathcal{B} \Longrightarrow X \setminus B \in \mathcal{B}$,

(3) $B_i \in \mathcal{B}$ für $i \in \mathbb{N} \Longrightarrow \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} B_i \in \mathcal{B}$.

Die Elemente von $\mathcal{B}$ heißen **messbare Mengen**.

Wichtigstes Beispiel: Oft ist X ein topologischer Raum und $\mathcal{B}$ wird von der Familie der offenen Mengen erzeugt. Dann spricht man von **Borel–Mengen** und der Borelschen σ-Algebra.

Definition: Sei X eine Menge und $\mathcal{B}$ eine σ–Algebra. Wir nennen eine Abbildung $\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty)$ ein **Maß**, bzw. das Tripel $(X, \mathcal{B}, \mu)$ einen **Maßraum**, falls gilt:

(1) μ ist σ–additiv, d.h. sind $E_i \in \mathcal{B}$, $i \in \mathbb{N}$ paarweise disjunkt, dann gilt

$$\mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(B_i).$$

(2) Ist $N \in \mathcal{B}$ mit $\mu(N) = 0$ und $B \subset N$, so ist auch $B \in \mathcal{B}$.

Mengen N mit $\mu(N) = 0$ heißen **Nullmengen**. Eine Eigenschaft gilt für μ**-fast alle** $x \in X$, falls sie für alle $x \in X \setminus N$ gilt, wobei N eine Nullmenge ist.
Ein Maß μ heißt **Wahrscheinlichkeitsmaß**, falls $\mu(X) = 1$ ist.

Definition: Sei $(X, \mathcal{B}, \mu)$ ein Maßraum. Die Abbildung $F : X \to X$ heißt **messbar**, falls für jedes $B \in \mathcal{B}$ gilt: $F^{-1}(B) \in \mathcal{B}$.
Die Abbildung $F : X \to X$ heißt **maßerhaltend**, falls

$$\mu(F^{-1}(B)) = \mu(B) \text{für alle } B \in \mathcal{B}.$$

Umgekehrt sagt man, dass μ ein **invariantes Maß** für die Abbildung F ist.

Warum benutzt man bei der Definition F^{-1} und nicht F ? $\rightsquigarrow$ Übungsaufgabe

Falls der zugrundeliegende Raum kompakt und die Abbildung F stetig ist, dann findet sich immer zumindest *ein* invariantes Maß.

Satz 4.1 (ohne Beweis, Krylov & Bogoljubov, 1937) *Sei X ein kompakter metrischer Raum und $F : X \to X$ stetig. Dann existiert ein F–invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß auf X.*

Beispiele für invariante Maße:

1. Für die Drehung R_α auf dem Einheitskreis $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ mit $R_\alpha(x) = x + \alpha \bmod 1$ ist das Lebesgue-Maß invariant.

2. Atomare Maße:
   Für eine Abbildung $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit einem Fixpunkt q ist das im Punkt q konzentrierte Dirac-Maß δ_q mit
   $$\delta_q(A) = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad q \in A, \\ 0 & \text{falls} \quad q \notin A \end{cases}$$
   ein invariantes Maß. Ähnliche, nur in einzelnen Punkten konzentrierte invariante Maße, lassen sich auch konstruieren, wenn F periodische Orbits besitzt. Sie liefern i.a. keine brauchbare Information über die Dynamik von F.

3. Bernoulli-Shift Ω_2:
   Hier definiert man das Maß auf den sogenannten Zylindermengen. Für eine solche Menge
   $$Z_{\gamma_k,\gamma_{k+1},\ldots,\gamma_\ell} = \{\omega \in \Omega_2;\ \omega_i = \gamma_i \text{ für } k \le i \le \ell\}$$
   mit $\gamma_i \in \{1,2\}$, $k,\ell \in \mathbb{Z}$ und $\ell \ge k$ setzt man
   $$\mu\left(Z_{\gamma_k,\gamma_{k+1},\ldots,\gamma_\ell}\right) = 2^{-(\ell-k+1)}.$$
   Beachte, dass sich jede Zylindermenge als disjunkte Vereinigung von anderen Zylindermengen schreiben lässt und die Definition von μ mit diesen Vereinigungen verträglich ist.

   Das Maß μ kann man nun von den Zylindermengen auf alle endlichen Vereinigungen von Zylindermengen fortsetzen vermöge
   $$\mu(Z \cup \tilde{Z}) = \mu(Z) + \mu(\tilde{Z}) - \mu(Z \cap \tilde{Z})$$
   und schließlich auch auf alle Mengen in der von den Zylindermengen erzeugten σ-Algebra.

   Behauptung: μ ist ein invariantes Maß für die Shift-Abbildung. Das muss man wieder nur für Zylindermengen zeigen. Das Urbild von $Z_{\gamma_k,\gamma_{k+1},\ldots,\gamma_\ell}$ ist die Zylindermenge $Z_{\tilde{\gamma}_{k+1},\tilde{\gamma}_{k+2},\ldots,\tilde{\gamma}_{\ell+1}}$ mit
   $$\tilde{\gamma}_{k+1} = \gamma_k,\ \tilde{\gamma}_{k+2} = \gamma_{k+1},\ \ldots,\ \tilde{\gamma}_{\ell+1} = \gamma_\ell$$
   und dem Maß
   $$\mu\left(Z_{\tilde{\gamma}_{k+1},\tilde{\gamma}_{k+2},\ldots,\tilde{\gamma}_{\ell+1}}\right) = 2^{-(\ell+1-(k+1)+1)} = 2^{-(\ell-k+1)}.$$

4. Bernoulli-Shift Ω_2^+:
   Hier definiert man das Maß auf den halbseitigen Zylindermengen. Für eine Menge
   $$Z_{\gamma_0,\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_\ell} = \{\omega \in \Omega_2^+;\ \omega_i = \gamma_i \text{ für } 0 \le i \le \ell\}$$
   setzt man
   $$\mu\left(Z_{\gamma_0,\gamma_1,\dots,\gamma_\ell}\right) = 2^{-(\ell+1)}.$$
   Dieses Maß lässt sich ebenfalls von diesen Zylindermengen auf die von diesen Mengen erzeugte σ-Algebra fortsetzen.

   Behauptung: μ ist ein invariantes Maß für die Shift-Abbildung.
   Zeige das wieder nur für Zylindermengen. Das Urbild von $Z_{\gamma_0,\gamma_1,\dots,\gamma_\ell}$ besteht diesmal aus zwei Zylindermengen $Z_{1,\gamma_0,\gamma_1,\dots,\gamma_\ell}$ und $Z_{2,\gamma_0,\gamma_1,\dots,\gamma_\ell}$, die beide das Maß $2^{-(\ell+2)}$ haben.

Einer der ersten Sätze, die maßtheoretische Eigenschaften (Existenz eines invarianten Maßes) und die Dynamik eines Systems (Rekurrenz) miteinander verknüpften, stammt von Henri Poincaré:

Satz 4.2 (Poincaréscher Wiederkehrsatz, 1899) *Sei $(X, \mathcal{B}, \mu)$ ein Maßraum und $f : X \to X$ eine maßerhaltende Abbildung. Betrachte eine Teilmenge $A \in \mathcal{B}$ mit $\mu(A) > 0$. Dann gibt es für μ-fast alle Punkte aus A unendlich viele Iterierte, die wieder in A liegen.*

Beweis: Sei $A \in \mathcal{B}$ mit $\mu(A) > 0$ gegeben und $B \subseteq A$ die Menge der Punkte, die nie mehr nach A zurückkehren:
$$B := \{x \in A;\ f^k(x) \notin A \ \text{ für } \ k = 1, 2, \dots\}.$$
Wir zeigen, dass
$$f^{-i}(B) \cap f^{-j}(B) = \emptyset \qquad (*)$$
für alle $i > j \ge 0$. Dazu nehmen wir einfach an, es gäbe ein $x \in f^{-i}(B) \cap f^{-j}(B)$. Dann ist $y := f^j(x) \in B$, also auch $y \in A$ und $f^i(x) = f^{i-j}(f^j(x)) = f^{i-j}(y) \in B \subseteq A$, im Widerspruch zur Definition von B. Wege $(*)$ und der σ-Additivität des Maßes ist
$$\sum_{i=0}^{\infty} \mu(f^{-i}(B)) = \mu\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} f^{-i}(B)\right) \le \mu(X) = 1.$$
Da μ ein invariantes Maß ist, gilt $\mu(B) = \mu(f{-1}(B)) = \mu(f{-2}(B)) = \dots$. Daher kann $\sum_{i=0}^{\infty} \mu(B) \le 1$ nur für $\mu(B) = 0$ erfüllt sein. □

Beispiel: Dezimalzahlen
Abgesehen von einer abzählbaren Menge, besitzen alle rellen Zahlen in $[0, 1]$ eine eindeutige Dezimaldarstellung. Für die Abbildung $f(x) = 10x \pmod 1$ auf $[0, 1]$ ist das Lebesgue-Maß μ ein invariantes Maß. Sie entspricht dem Shift nach links, denn für $x = 0.a_1a_2a_3\dots$ ist $f(x) = 0.a_2a_3a_4\dots$. Sei $A = [0.z_1z_2z_3\dots z_k,\ 0.z_1z_2z_3\dots z_k + 10^{-k}]$, dann ist sicher $\mu(A) = 10^{-k} > 0$. Der Poincarésche Wiederkehrsatz besagt in diesem Fall, dass eine beliebige vorgegebene Ziffernfolge $z_1z_2z_3\dots z_k$ in fast jeder Dezimalzahl unendlich oft auftaucht.

4.2 Ergodizität

Besonders wichtig sind die Fälle, in denen sich ein dynamisches System nicht in kleinere Teile (bezüglich eines invarianten Maßes) zerlegen lässt.

Definition: Wir nennen eine Abbildung $F : X \to X$ **ergodisch** bezüglich des invarianten Wahrscheinlichkeits-Maßes μ, falls für jede Menge $A \subseteq X$ mit $F^{-1}(A) = A$ gilt: $\mu(A) = 0$ oder $\mu(A) = 1$.

Eine Charakterisierung von ergodischen Maßen liefert das folgende Lemma, das wir später benutzen werden, um in einem konkreten Fall Ergodizität nachzuweisen.

Lemma: *Sei μ ein invariantes ergodisches Wahrscheinlichkeits-Maß für die Abbildung F auf dem Maßraum $(X, \mathcal{B}, \mu)$. Dann gilt:*
Falls T eine messbare Funktion ist und $(T \circ F)(x) = T(x)$ für μ-fast alle $x \in X$, dann ist T fast überall konstant.

Beweis: Die Sublevelmengen $S_\alpha := \{x \in X;\ T(x) < \alpha\}$ sind messbar (so sind messbare Funktionen gerade definiert) und es gilt

$$F^{-1}(S_\alpha) = \{x \in X;\ \underbrace{T(F(x))}_{=T(x)\mu-\text{f. ü.}} < \alpha\} = S_\alpha.$$

Also gilt $\mu(S_\alpha) = 0$ oder $\mu(S_\alpha) = 1$.
Da die Funktion $\alpha \mapsto \mu(S_\alpha)$ monoton wachsend ist, existiert $\alpha_0 := \inf\{\alpha;\ \mu(S_\alpha) = 1\}$ und es ist

$$\mu(S_\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{für } \alpha < \alpha_0 \\ 1 & \text{für } \alpha > \alpha_0 \end{cases}$$

Zu zeigen ist nun noch, dass $T(x) = \alpha_0$ für μ-fast alle $x \in X$. Falls dies nicht der Fall ist, so ist eine der Mengen $\{x \in X;\ T(x) > \alpha_0\}$ oder $\{x \in X;\ T(x) < \alpha_0\}$ von positivem Maß. Wir beschränken uns auf den ersten Fall, der zweite lässt sich analog behandeln. Da

$$\{x \in X;\ T(x) > \alpha_0\} = \cup_{k=1}^{\infty}\{x \in X;\ T(x) > \alpha_0 + \frac{1}{k}\}$$

keine Vereinigung abzählbar vieler Nullmengen sein kann, muss es ein $k \in \mathbb{N}$ geben, so dass

$$\mu\left(\{x \in X;\ T(x) > \alpha_0 + \frac{1}{k}\}\right) > 0.$$

Dies widerspricht aber der Gleichung $\mu(S_{\alpha_0 + \frac{1}{2k}}) = 1$. □

4.2.1 Der Birkhoffsche Ergodensatz

Sei μ ein invariantes, aber nicht unbedingt ergodisches Wahrscheinlichkeits-Maß für die Abbildung $F : X \to X$. Für $h \in L^1(X, \mathbb{R})$ definieren wir das **Zeitmittel** von h entlang dem Orbit von x als

$$h^*(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} h(F^k(x)).$$

Zunächst wissen wir nichts über die Existenz dieses Grenzwert, der folgende Satz zeigt aber, dass er μ-fast überall existiert.

Satz 4.3 (Birkhoffscher Ergodensatz, 1931) *Sei $(X, \mathcal{B}, \mu)$ ein Maßraum und $F : X \to X$ eine stetige maßerhaltende Abbildung. Dann existiert zu $h \in L^1(X, \mathbb{R})$ eine Funktion $h^* \in L^1(X, \mathbb{R})$, so dass für μ-fast alle $x \in X$ gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} h(F^j(x)) = h^*(x).$$

Außerdem gilt $h^* \circ F = h^*$ fast überall, und $\int_X h^* \, d\mu = \int_X h \, d\mu$. Falls das dynamische System ergodisch ist, dann gilt

$$h^*(x) = \int_X h \; d\mu \qquad \text{für } \; \mu - \text{fast alle } x \in X.$$

oder, plakativer ausgedrückt,

Zeitmittel = Raummittel.

Interpretation:
Sei μ ein ergodisches invariantes Maß für die Abbildung $F : X \to X$. Die relative Häufigkeit, mit der ein Orbit eine messbare Menge A besucht ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#\{0 \le k \le n-1; \; F^k(x) \in A\}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_A(F^k(x)).$$

Für μ-fast alle x konvergiert diese Summe gegen $\int \chi_A d\mu$, also gegen $\mu(A)$. Mit anderen Worten, das ergodische Maß wird fast überall von der '"Besuchshäufigkeit'ëinzelner Trajektorien erzeugt. Man kann daher $\mu(A)$ auffassen als die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine bestimmte Iterierte der Abbildung eine Punkt in die Menge A abbildet.

Spezialfall:
Betrachte die Rotation $R_\alpha : S^1 \to S^1$ der Kreislinie. Sei α irrational. Dann ist das Lebesgue-Maß ein invariantes Maß.
Sei weiter $x_0 \in S^1$ und $g \in C^0(S^1, \mathbb{R})$ beliebig. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} g(R_\alpha^j(x_0)) = \int_{S^1} g(x) \; dx.$$

In diesem Fall gilt Gleichheit sogar für alle $x \in S^1$.

Beweis des Spezialfalls:
Approximiere zunächst g gleichmäßig durch eine Fourierreihe. sei $g_m(x) = \sum_{k=0}^m a_k e^{2\pi i k x}$ eine Partialsumme dieser Fourierreihe Dann gilt:

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} g_m(R_\alpha^j(x_0)) \quad = \quad \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m} a_k e^{2\pi i k(x_0 + j\alpha)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{m} a_k e^{2\pi i k x_0} \sum_{j=0}^{n-1} e^{2jk\alpha\pi i} \\
&= a_0 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} a_k e^{2\pi i k x_0} \frac{e^{2\pi i n k\alpha}-1}{e^{2\pi i k\alpha}-1} \\
\Rightarrow a_0 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} a_k e^{2\pi i k x_0} \frac{e^{2\pi i n k\alpha}-1}{e^{2\pi i k\alpha}-1} &= a_0 = \int_{S^1} g_m(x)\,dx
\end{aligned}
$$

da

$$\int_{S^1} g_m(x)\,dx = \int_{S^1} \sum_{k=0}^{m} a_k e^{2\pi i k x}\,dx = \sum_{k=0}^{m} a_k \underbrace{\int_{S^1} e^{2\pi i k x}\,dx}_{=0,\ \text{falls } k\neq 0} = a_0.$$

□

4.2.2 Ergodizität und Mischungseigenschaften

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, dass Ergodizität unter gewissen Bedingungen ausreicht, um die Dynamik der "meisten" Trajektorien zu beschreiben.

Satz 4.4 *Sei X ein kompakter metrischer Raum und μ ein invariantes ergodisches Wahrscheinlichkeits-Maß für die Abbildung F, das jeder nichtleeren offenen Menge ein positives Maß zuordnet.*
Dann ist

$$\mu\left(\{x \in X;\ \gamma_+(x) \text{ ist dicht in } X\}\right) = 1.$$

Unter diesen Voraussetzungen ist ein ergodisches dynamisches System daher immer transitiv. Der Beweis beruht auf einigen Lemmata, die wir zuerst bereitstellen.

Lemma: *Sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß, das invariant unter der Abbildung F ist. Dann gilt:*

(i) Falls $F^{-1}(B) \subset B$, dann existiert eine Teilmenge $B_1 \subseteq B$ mit $\mu(B_1) = \mu(B)$ und $F^{-1}(B_1) = B_1$.

(ii) Falls μ ein ergodisches Maß ist und $F^{-1}(B) \subset B$, dann ist $\mu(B) = 0$ oder $\mu(B) = 1$.

Beweis:

(i) Es ist nach Voraussetzung

$$B \supset F^{-1}(B) \supset F^{-2}(B) \supset \dots.$$

Setze $B_1 := \cap_{i=0}^{\infty} F^{-i}(B)$, dann ist einerseits $B_1 \subset B$ und $\mu(B_1) = \lim_{k\to\infty} \mu(F^{-k}(B)) = \mu(B)$. Die Menge B_1 ist auch invariant, denn

$$F^{-1}(B_1) = \cap_{i=1}^{\infty} F^{-i}(B) = B_1.$$

(ii) Nach Teil (i) existiert eine Teilmenge $B_1 \subseteq B$ mit $F^{-1}(B_1) = B_1$. Wegen der Ergodizität von μ ist daher $\mu(B_1) = 0$ oder $\mu(B_1) = 1$.

Daraus folgert man nun mit Hilfe von (i), dass $\mu(B) = 0$ oder $\mu(B) = 1$, da ja $\mu(B_1) = \mu(B)$.

□

Lemma: *Sei μ ein invariantes Wahrscheinlichkeits-Maß für die Abbildung F auf dem Maßraum $(X, \mathcal{B}, \mu)$. Falls μ ergodisch und $\mu(A) > 0$ ist, dann ist $\mu(\cup_{n\geq 0} F^{-n}(A)) = 1$.*

Beweis:
Sei $B := \cup_{n\geq 0} F^{-n}(A)$. Dann ist $F^{-1}(B) \subset B$ und $\mu(B) = 0$ oder 1 nach dem vorhergehenden Lemma. Da schon $\mu(A) > 0$ ist, scheidet der Fall $\mu(B) = 0$ aus. □

Beweis von Satz 4.4: Sei $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Basis der Topologie von X. Eine solche abzählbare Basis existiert, da X als kompakt vorausgesetzt wurde.
Dann ist $\gamma_+(x)$ dicht in X genau dann, wenn $x \in \cap_{n=1}^{\infty} V_n$, wobei $V_n := \cup_{k=0}^{\infty} F^{-k}(U_n)$ die Menge aller Punkte ist, die irgendwann nach U_n gelangen.
Aus der Invarianz des Maßes folgt sofort, dass $\mu(F^{-1}(V_n)) = \mu(V_n)$. Außerdem ist

$$F^{-1}(V_n) \subset V_n,$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen der Ergodizität von μ muss dann $\mu(V_n) = 0$ oder 1 sein. Der Fall $\mu(V_n) = \mu(\cup_{k=0}^{\infty} F^{-k}(U_n)) = 0$ scheidet wieder aus, da $\cup_{k=0}^{\infty} F^{-k}(U_n)$ eine offene Teilmenge enthält.
Es ist also $V_n = X \setminus N_n$, wobei N_n eine Nullmenge ist.
Damit ist dann wegen $\cap_n V_n = X \setminus (\cup N_n)$ auch

$$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n) = 1.$$

□

4.3 Lyapunov-Exponenten

Wir kennen schon den Begriff der sensitiven Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen, der besagt, dass in der Nähe jeden Punktes weitere Punkte liegen, so dass sich die Trajektorien dieser Punkte voneinander entfernen. Viel präziser und quantitativer wird dieses Phänomen durch die sogenannten Lyapunov-Exponenten erfasst. Sie geben an, mit welcher exponentiellen Rate sich „die meisten“ Trajektorien voneinander entfernen.

Satz 4.5 (Oseledec, 1968) *Sei $(X, \mathcal{B}, \mu)$ ein Maßraum und μ ein ergodisches invariantes Wahrscheinlichkeits-Maß für die Abbildung $F : X \to X$. Für die Ableitung von F gelte*

$$\int_X \max(0, \log \|Df(x)\|)\, d\mu < \infty.$$

Sei

$$T_n(x) = DF(F^{n-1}(x)) \circ DF(F^{n-2}(x)) \circ \ldots \circ DF(x) = \prod_{j=1}^{n} DF(F^{n-j}(x)).$$

Dann existiert für μ-fast alle $x \in X$ der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \left(T_n(x)^T \, T_n(x)\right)^{\frac{1}{2n}} =: \Lambda(x).$$

und ist eine symmetrische positiv semi-definite Matrix.

Bemerkung: Wegen der Ergodizität von μ stimmen die Eigenwerte von $\Lambda(x)$ für μ-fast alle $x \in X$ überein, denn nach Birkhoffs Ergodensatz ist

$$\Lambda(x) = \int_X \Lambda(\xi) \, d\mu$$

für μ-fast alle $x \in X$.

Definition: Die Logarithmen dieser "typischen" Eigenwerte von $\Lambda(x)$ heißen **Lyapunov-Exponenten**.

Falls ein Lyapunov-Exponent positiv ist, dann bedeutet dies, dass sich die meisten nahe beieinander liegenden Trajektorien mit einer exponentiellen Rate voneinander entfernen.
In Systemen, bei denen Rekurrenz garantiert ist, wird diese Eigenschaft bei Anwendern häufig als "Nachweis" oder als "Definition" von Chaos betrachtet.
Dies hängt auch damit zusammen, dass die numerische Berechnung von Lyapunov-Exponenten zwar aufwändig, aber im allgemeinen nicht sehr kompliziert ist. (Zumindest so lange man nicht nachzuweist, dass die numerische Simulation über große Zeiträume ein verlässliches Ergebnis produziert). Außerdem wird meist in Bezug auf das übliche Lebesgue-Maß gerechnet und stillschweigend angenommen, dass es ein invariantes, ergodisches Maß μ und eine Menge U von positivem Lebesgue-Maß gibt, so dass für alle $x \in U$ die Gleichung "Zeitmittel = Raummittel" gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi(F^k(x)) = \int \phi \, d\mu \qquad \forall \phi \in C^1.$$

Die Existenz eines solchen SRB-Maßes (Sinai-Ruelle-Bowen-M.) ist allerdings nur für sehr wenige realistische dynamische Systeme wirklich nachgewiesen.
Bei zwei oder mehr positiven Lyapunov-Exponenten wird übrigens gelegentlich der Begriff **Hyperchaos** verwendet.

Beispiel: Intervallabbildung
Falls $F : [0,1] \to [0,1]$ eine (stückweise) differenzierbare eindimensionale Abbildung ist, dann lässt sich der Lyapunov-Exponent folgendermaßen bestimmen.

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log |T_n(x)| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \prod_{j=1}^{n} F'(F^{n-j}(x)) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log F'(F^j(x)) = \int_0^1 \log |F'(x)| \, d\mu
\end{aligned}$$

wobei für die letzte Gleichung wieder der Birkhoffsche Ergodensatz verwendet wurde.