

5 Kreisabbildungen und Rotationszahl

Neben den Intervallabbildungen gibt es eine weitere Klasse von eindimensionalen dynamischen Systemen, die Abbildungen der Kreislinie in sich.

5.1 Überlagerung und Lift

Bei Kreisabbildungen wird uns später interessieren, wie oft eine Trajektorie um die Kreislinie „herumgelaufen“ ist. Um diese „Windungszahl“ leicht bestimmen zu können, benutzen wir ein topologisches Hilfsmittel, die Überlagerung.

Definition: Sei X ein metrischer Raum. Eine **Überlagerung** von X besteht aus einem metrischen Raum \tilde{X} und einer Abbildung $p : \tilde{X} \rightarrow X$ so dass für jedes $x \in X$ eine offene Umgebung U existiert, für die das Urbild $p^{-1}(U)$ aus einer Vereinigung von offenen, paarweise disjunkten Mengen $U_j \subset \tilde{X}$ ist. Außerdem verlangen wir, dass für jedes j die Einschränkung $p|_{U_j} : U_j \rightarrow U$ ein Homöomorphismus ist.

Uns werden in der Vorlesung eigentlich nur zwei Überlagerungen begegnen

1. Die Überlagerung des Kreises S^1 durch die reelle Gerade \mathbb{R}
Betrachte den Einheitskreis $S^1 := \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$. Die Abbildung $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ mit $p(x) := e^{2\pi i x}$ bildet die reelle Gerade auf den Kreis ab und Punkte, die sich um eine ganze Zahl unterscheiden werden auf den selben Punkt abgebildet. Wir können also die Kreislinie auch als den Raum \mathbb{R}/\mathbb{Z} auffassen, der durch die Äquivalenzrelation

$$x_1 \sim x_2 \iff x_1 - x_2 \in \mathbb{Z}$$

erzeugt wird.

2. Die Überlagerung des Torus \mathbb{T}^2 durch die reelle Ebene \mathbb{R}^2
In diesem Fall wird in der Ebene \mathbb{R}^2 durch die Äquivalenzrelation

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff x_1 - x_2 \in \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad y_1 - y_2 \in \mathbb{Z}$$

eine Topologie definiert. Man kann sich dabei vorstellen, dass die Ober- und Unterseite des Quadrats $[0, 1]^2$ sowie die linke und rechte Seite miteinander verklebt werden.

Die Bedeutung von Überlagerungen besteht darin, dass man gewisse Objekte (Wege, Abbildungen,...) von X nach \tilde{X} „liften“ kann, um sie dann einfacher analysieren zu können.

Lemma 5.1 Sei $f : S^1 \rightarrow S^1$ eine stetige Abbildung und $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ gegeben als $p(x) = x \pmod{1}$.

Dann existiert eine stetige Abbildung $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$f \circ p = p \circ F.$$

F heißt der **Lift** von f . Die Abbildung F ist eindeutig bis auf eine ganzzahlige Konstante und

$$\deg f := F(x+1) - F(x)$$

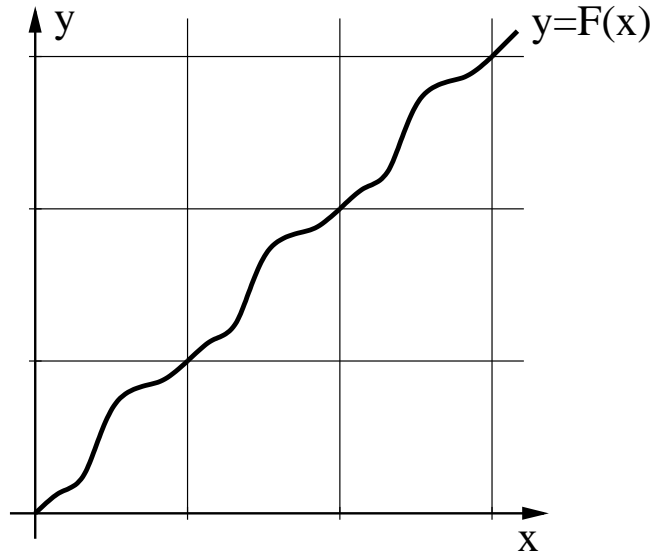


Abbildung 1: Der Lift einer Kreisabbildung vom Abbildungsgrad 1

ist eine von x unabhängige ganze Zahl, der **Abbildungsgrad** von f . Der Abbildungsgrad ist $+1$ oder -1 , falls f ein Homöomorphismus ist.

Beweis: Wähle einen beliebigen Punkt $z \in S^1$. Dann ist $z = p(x)$ für ein (nicht eindeutig bestimmtes) $x \in \mathbb{R}$. Genauso ist $f(z) = p(y)$ mit einem ebenfalls nicht eindeutigen $y \in \mathbb{R}$. Zunächst setzen wir $F(x) := y$. Lokal kann man nun F stetig fortsetzen. Sei dazu δ so klein, dass

$$|z - \tilde{z}| < \delta \implies |f(z) - f(\tilde{z})| < \frac{1}{2}.$$

Für \tilde{x} in einer δ -Umgebung von x ist $|p(\tilde{x}) - z| < \delta$ und wir können ein eindeutiges \tilde{y} finden mit $p(\tilde{y}) = f(p(\tilde{x}))$ sowie $|\tilde{y} - y| < \frac{1}{2}$. Durch $F(\tilde{x}) := \tilde{y}$ wird nun offensichtlich eine stetige Funktion auf $(x - \delta, x + \delta)$ erklärt, die ein Lift von f ist. So kann man nun fortfahren und sukzessive F auf ganz \mathbb{R} definieren.

Eindeutigkeit von F : Sei \tilde{F} ein weiterer Lift von f . Dann ist $p \circ (F(x) - \tilde{F}(x)) = f \circ p(x) - f \circ p(x) = 0$, also ist $F(x) - \tilde{F}(x)$ eine ganze Zahl. Da $F - \tilde{F}$ stetig ist und nur ganzzahlige Werte annimmt, muss es sich um eine konstante Funktion handeln.

$F(x+1) - F(x)$ ist eine von x unabhängige ganze Zahl, denn die Funktion $x \mapsto F(x+1) - F(x)$ ist stetig und nimmt nur ganzzahlige Werte an. Letzteres ergibt sich aus der Identität

$$p \circ F(x+1) = f \circ p(x+1) = f \circ p(x) = p \circ F(x).$$

Wir müssen noch zeigen, dass f ein Homöomorphismus ist, genau dann wenn $|\deg f| = 1$.

Im Fall $|\deg f| = 0$ ist der Lift F nicht monoton und kann daher nicht injektiv sein.

Falls $|\deg f| > 1$, dann ist $|F(x+1) - F(x)| \geq 2$, was ebenfalls einen Widerspruch zur Injektivität ergibt. \square

Beispiel: Jede Translation $x \mapsto x + \alpha$ ist Lift einer Drehung um den Winkel α bzw. $\alpha \pmod{1}$.

5.2 Expandierende Abbildungen

Zunächst beschäftigen wir uns mit Abbildungen, die einen Abbildungsgrad > 1 besitzen.

Definition: Sei X ein Banachraum. Eine Abbildung $f : X \rightarrow X$ heißt **expandierend**, falls es eine Zahl $\lambda > 1$ und ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass für alle $x, y \in X$ mit $0 < \|x - y\| < \varepsilon$ gilt:

$$\|f(x) - f(y)\| \geq \lambda \|x - y\|.$$

Ganz besonders wichtige Beispiele werden für uns die Abbildungen $E_m : S^1 \rightarrow S^1$ mit

$$E_m(x) := mx \pmod{1}$$

und $m \in \mathbb{Z}$ sein (siehe Kapitel 2, wo bereits E_2 eingeführt wurde). Es gilt $\deg E_m = m$ und jeder Punkt $x \in S^1$ hat m Urbilder. Mit anderen Worten: E_m ist die m -fache Überlagerung der Kreislinie durch sich selbst.

Wir werden nun zunächst diese Abbildungen E_m genauer untersuchen und anschließend zeigen, dass **jede** expandierende Abbildung der Kreislinie C^0 -konjugiert ist zu einem der E_m .

Satz 5.2 (Eigenschaften von E_m) Sei E_m die lineare expandierende Kreisabbildung vom Grad m . Dann gilt:

- (i) E_m besitzt genau $m^n - 1$ periodische Punkte der Periode n ,
- (ii) die Menge aller periodischen Punkte ist dicht in S^1 ,
- (iii) E_m besitzt einen dichten Orbit und
- (iv) die Abbildung E_m hat sensitive Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen.

Beweis: Schreibe Punkte auf S^1 in m -adischer Darstellung

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{m^j} \quad \text{mit } a_j \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}.$$

Die Abbildung E_m operiert dann auf der Folge (a_1, a_2, a_3, \dots) wie der Bernoulli-Shift auf Ω_m^+ . Dies sieht man für e_m genauso wie in Kapitel 2 für E_2 . Die Aussage folgt dann direkt aus Satz ??.

□

Satz 5.3 (Ergodizität von E_m) Sei λ das Lebesgue-Maß auf der Kreislinie S^1 . Dann ist E_m ergodisch bezüglich λ , d.h. für jede invariante Menge A gilt: $\lambda(A) = 0$ oder $\lambda(A) = 1$.

Beweis: Man überprüft sofort, dass das Lebesgue-Maß ein invariantes Maß für die Abbildung E_m ist, da das Urbild jeder messbaren Menge A aus m Mengen besteht, die durch Translation ineinander übergehen und von denen jede das Maß $\frac{1}{m}\lambda(A)$ hat.

Sei $A = E_m^{-1}(A)$ eine invariante Menge. Für jedes $x_1 \in A$ und $E_m(x_1) = E_m(x_2)$ ist also auch $x_2 \in A$. Da

$$E_m \left(\left[0, \frac{1}{m} \right] \right) = E_m \left(\left[\frac{1}{m}, \frac{2}{m} \right] \right) = \dots = E_m \left(\left[\frac{m-1}{m}, 1 \right] \right)$$

gilt

$$\lambda(A) = m\lambda\left(A \cap \left[0, \frac{1}{m}\right]\right) \implies \lambda\left(A \cap \left[0, \frac{1}{m}\right]\right) = \lambda(A) \cdot \lambda\left(\left[0, \frac{1}{m}\right]\right).$$

Mittels Induktion kann man zeigen, dass

$$(*) \quad \lambda(A \cap J) = \lambda(A) \cdot \lambda(J).$$

falls J ein beliebiges Intervall der Form $I = \left[\frac{j}{m^k}, \frac{j+1}{m^k}\right]$ mit $k \geq 1$ und $0 \leq j \leq m^k - 1$ ist. Wegen der σ -Additivität des Maßes gilt $(*)$ auch für die disjunkte Vereinigung endlich oder abzählbar vieler solcher Intervalle.

Indem man A durch eine solche Vereinigung von Intervallen approximiert, kann man erreichen, dass

$$|\lambda(A \cap A) - \lambda(A) \cdot \lambda(A)| < \varepsilon$$

für jedes beliebige $\varepsilon > 0$. Dann gilt aber $\lambda(A) = \lambda(A)^2$, also $\lambda(A) = 0$ oder $\lambda(A) = 1$. \square

Korollar 5.4 Die Menge der reellen Zahlen aus $[0, 1]$, in deren Binärdarstellung „im Mittel“ gleich viele Nullen und Einsen vorkommen, hat volles Lebesgue-Maß.

Beweis: Da die Abbildung bezüglich des Lebesgue-Maßes ergodisch ist, lässt sich der Birkhoffsche Ergodensatz 4.3 anwenden auf die Abbildung E_2 und $f(x) = \chi_{[1/2, 1]}$. Dann ist $f(x) = 1$ gerade die erste Nachkommastelle der Binärdarstellung von x . Der Birkhoffsche Ergodensatz besagt nun, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(E_2^k(x)) = \int_0^1 f(\xi) d\xi = \frac{1}{2} \quad \mu - \text{f. ü.}$$

\square

Bemerkung:

- (i) Derselbe Beweis funktioniert natürlich auch für die Dezimaldarstellung, die Abbildung E_{10} und $f(x) = \chi_{\left[\frac{k}{10}, \frac{k+1}{10}\right]}$.
- (ii) Derselbe Beweis funktioniert auch für längere Abschnitte der Binärdarstellung und zeigt, dass die Menge der **normalen Zahlen**, in denen jeder Ziffernblock mit derselben Häufigkeit auftritt, volles Lebesgue-Maß besitzt.
- (iii) Übrigens: Es ist ein offenes Problem, ob die Zahl π eine normale Zahl ist.

Satz 5.5 (Hasselblatt & Katok, Satz 2.4.6) *Jede expandierende Abbildung f der Kreislinie vom Grad $m > 1$ ist C^0 -konjugiert zur Abbildung E_m .*

Der Beweis des Satzes benutzt das folgende einfache Lemma.

Lemma: *Jede stetige Abbildung f der Kreislinie vom Grad $\deg f = m > 1$ hat einen Lift, der einen Fixpunkt $x_* \in [0, 1]$ besitzt.*

Beweis des Lemmas: Sei F irgendein Lift von f und $H(x) := F(x) - x$. Das Intervall mit den Grenzen $H(0)$ und $H(1)$ hat die Länge $m - 1$ und enthält daher eine ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert ein $x_* \in [0, 1]$ mit $H(x_*) = n$, bzw. $F(x_*) - n = x_*$. Der Lift $\tilde{F}(x) = F(x) - n$ besitzt dann einen Fixpunkt x_* im Intervall $[0, 1]$. \square

Beweis des Satzes: Nach dem vorhergehenden Lemma besitzt f einen Lift F mit Fixpunkt $x_* \in [0, 1]$. Ohne Einschränkung können wir $x_* = 0$ annehmen, dazu ersetzen wir $f(x)$ durch $f(x + x_*)$.

Gesucht ist ein Homöomorphismus h mit

$$(*) \quad E_m \circ h = h \circ f.$$

Eine Schwierigkeit besteht darin, dass E_m nicht invertierbar ist. Zuerst bringen wir diese Gleichung in eine Fixpunktform. Ziel ist es, h durch Anwenden des Banachschen Fixpunktsatzes zu finden. Sei \mathcal{C} der Raum der stetigen Abbildungen $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ mit $h(0) = 0$ und $h(1) = 1$. Diese Abbildungen lassen sich zu stetigen Kreisabbildungen mit Grad 1 fortsetzen.

Da $F(0) = 0$, $F(1) = \deg f = m$ und F streng monoton ist, gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_m = 1$ mit $F(a_n) = n$ für $n = 0, 1, \dots, m$. Setze nun

$$(\mathcal{F}h)(x) = \begin{cases} \frac{1}{m}h(p(F(x))) + \frac{n}{m} & \text{falls } a_n \leq x \leq a_{n+1}, \quad 0 \leq n < m, \\ 1 & \text{falls } x = 1. \end{cases}$$

Dabei bezeichnet $p(F(x)) = F(x) \pmod{1}$ den nicht-ganzzahligen Anteil von $F(x)$.

Um einzusehen, dass Fixpunkte von \mathcal{F} einer Lösung von $(*)$ entsprechen, berechnen wir für $x \in [0, 1)$ mit $a_n \leq x < a_{n+1}$

$$\begin{aligned} E_m(\mathcal{F}h)(x) &= E_m \left(\frac{1}{m}h(p(F(x))) + \frac{n}{m} \right) \\ &= h(p(F(x))) \\ &= h(f(p(x))) \quad \text{da } F \text{ Lift von } f \\ &= h(f(x)) \quad \text{da } x \in [0, 1) \end{aligned}$$

Nun zeigen wir noch, dass \mathcal{F} tatsächlich den Bedingungen des Banachschen Fixpunktsatzes genügt.

1. Behauptung: \mathcal{F} bildet \mathcal{C} in sich ab.

$\mathcal{F}(h)$ ist offensichtlich stetig für $x \neq a_m$. Da aber die Punkte a_n mit $n = 0, 1, 2, \dots, m$ alle auf 0 abgebildet werden, ist auch hier die Stetigkeit gewährleistet.

Die Monotonie von $\mathcal{F}(h)$ folgt aus der Monotonie von F und von h und auch die Randwerte $\mathcal{F}h(0) = 0$ und $\mathcal{F}h(1) = 1$ sind wie gefordert.

2. Behauptung: \mathcal{F} ist eine Kontraktion.

Seien dazu $h_1, h_2 \in \mathcal{C}$. Dann ist

$$\|\mathcal{F}(h_1) - \mathcal{F}(h_2)\|_{C^0} = \sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{1}{m}h_1(F(x)) - \frac{1}{m}h_2(F(x)) \right| = \frac{1}{|m|} \|h_1 - h_2\|_{C^0}.$$

Nach dem Banachschen Fixpunktsatz besitzt \mathcal{F} also einen Fixpunkt, der E_m und f konjugiert. \square

Bemerkung:

1. In [Hasselblatt & Katok] wird auch ein konstruktiver Beweis angegeben.
2. Falls der Abstand von f und E_m in C^1 klein ist, dann ist der konjugierende Homöomorphismus h nahe an der Identität:

$$\|f - E_m\|_{C^1} \leq \delta \Rightarrow \|h - \text{Id}|_{S^1}\|_{C^0} \leq \varepsilon.$$

3. Man kann diesen Satz als ein Resultat über strukturelle Stabilität interpretieren: Alle Abbildungen, die in C^1 nahe genug an E_m liegen, sind automatisch ebenfalls expandierend und daher konjugiert zu E_m , verhalten sich also im wesentlichen gleich.

5.3 Rotationszahlen

Satz 5.6 (Poincaré, ca. 1885) Sei $f : S^1 \rightarrow S^1$ ein orientierungserhaltender Homöomorphismus und $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ein Lift von f . Dann existiert

$$\rho(f) := p \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x) - x}{n} \right)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und ist unabhängig von x . Hierbei ist $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ die kanonische Projektion.

Definition: $\rho(f)$ heißt **Rotationszahl** von f .

Interpretation: Die Rotationszahl gibt an, wieviele Umläufe pro Iteration ein Orbit “im Mittel” erfährt.

Beweis: Da f orientierungserhaltend und ein Homöomorphismus ist, gilt $\deg f = 1$.

1. Schritt: Der Grenzwert existiert für ein festes $x \in S^1$, zum Beispiel für $x = 0$.

Falls f einen periodischen Punkt x der Periode n besitzt, dann ist $F^n(x) = x + m$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Für $k \in \mathbb{N}$ ist $k = sn + r$ mit $s \in \mathbb{N}$ und einem Rest $0 \leq r < n$. Daher ist

$$\frac{F^k(x)}{k} = \frac{F^r(sm + x)}{sn + r} = \frac{sm + F^r(x)}{sn + r} \rightarrow \frac{m}{n}$$

für $k \rightarrow \infty$ beziehungsweise $s \rightarrow \infty$.

Falls keine periodischen Punkte existieren, dann existiert eine Folge $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $k_n \leq F^n(x) - x < k_n + 1$.

Wendet man diese Ungleichung an auf die Punkte $x = 0, F^n(0), \dots, F^{(m-1)n}(0)$ an und addiert die resultierenden m Ungleichungen so erhält man

$$\frac{k_n}{n} < \frac{F^{mn}(0)}{mn} < \frac{k_n + 1}{n}.$$

Die Punkte $\frac{F^{mn}(0)}{mn}$ und $\frac{F^n(0)}{n}$ liegen also beide im Intervall $[\frac{k_n}{n}, \frac{k_n+1}{n}]$. Daher muss gelten:

$$\left| \frac{F^{mn}(0)}{mn} - \frac{F^n(0)}{n} \right| < \frac{1}{n}.$$

Analog ist auch

$$\left| \frac{F^{mn}(0)}{mn} - \frac{F^m(0)}{m} \right| < \frac{1}{m}$$

und schließlich

$$\left| \frac{F^n(0)}{n} - \frac{F^m(0)}{m} \right| < 1/n + 1/m.$$

Folglich ist $\left(\frac{F^n(0)}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge.

2. Schritt: $\rho(f)$ hängt nicht vom Punkt x ab.

Wegen $\deg f = 1$ ist $F(x+1) = F(x) + 1$. Damit ergibt sich per Induktion

$$|x-y| < 1 \implies |F(x)-F(y)| < 1 \implies |F^2(x)-F^2(y)| < 1 \implies \dots \implies |F^n(x)-F^n(y)| < 1.$$

Es gilt also

$$\left| \frac{1}{n} (F^n(x) - x) - \frac{1}{n} (F^n(y) - y) \right| \leq \frac{1}{n} |F^n(x) - F^n(y)| + \frac{1}{n} |x - y| \leq \frac{2}{n} \rightarrow 0.$$

3. Schritt: ρ ist wohldefiniert, d.h. ρ hängt nicht vom Lift F ab.

Wählt man einen anderen Lift $\tilde{F} = F + m$ mit $m \in \mathbb{Z}$, so ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{F}^n(x) - x}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x) + nm - x}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x) - x}{n} + m.$$

Durch die Projektion p erhält man dann die selbe Rotationszahl wie bei Verwendung des Lifts F . □

Lemma: Sei $f : S^1 \rightarrow S^1$ ein orientierungs-erhaltender Homöomorphismus und $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ein Lift von f . Die Rotationszahl $\rho(F)$ ist rational, genau dann wenn f einen periodischen Orbit besitzt.

Beweis: “ \Leftarrow ”: Sei $x \in S^1$ ein periodischer Punkt von f . Dann existiert ein $m \in \mathbb{N}$, so dass $f^m(x) = x$. Sei F ein Lift von f , dann ist $F^m(x) = x + k$ für eine ganze Zahl k .

Induktiv folgt daraus, dass $F^{nm}(x) = x + nk$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für die Rotationszahl ergibt sich dann

$$\rho(F) = p \left(\lim_{n \in \mathbb{N}} \frac{F^n(x) - x}{n} \right) = p \left(\lim_{n \in \mathbb{N}} \frac{F^{nm}(x) - x}{nm} \right) = \frac{k}{m} \in \mathbb{Q}.$$

“ \Rightarrow ”: Sei $\rho(f) = \frac{r}{q} \in \mathbb{Q}$. Dann ist $\rho(f^q) = 0$ wegen

$$\rho(f^q) = p \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^{nq}(x) - x}{n} \right) = p \left(q \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^{nq}(x) - x}{nq} \right) = p(q\rho(f)) = 0.$$

Es genügt daher zu zeigen, dass $g := f^q$ einen Fixpunkt besitzt, wenn $\rho(g) = 0$ ist.

Angenommen, g besitzt keinen Fixpunkt. Betrachte dann einen Lift G von g mit $G(0) \in [0, 1)$. Sei $H(x) = G(x) - x$. Dann ist H stetig und 1-periodisch, d.h. $H(x+1) = H(x)$.

Außerdem nimmt H keine ganzzahligen Werte an, sonst hätte g einen Fixpunkt.

Daher nimmt H auf $[0, 1]$ ein Minimum und ein Maximum an. Es lässt sich daher ein ε finden, so dass $\varepsilon \leq H(x) \leq 1 - \varepsilon$ für alle x , bzw.

$$\varepsilon \leq F(x) - x \leq 1 - \varepsilon.$$

Schreibt man sich diese Ungleichungen für $x = 0, F(0), F^2(0), \dots, F^{n-1}(0)$ auf und addiert sie, erhält man (Teleskopsumme !)

$$n\varepsilon \leq F^n(0) \leq n(1 - \varepsilon).$$

Für die Rotationszahl folgt daraus:

$$\varepsilon \leq \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(0)}{n}}_{=\rho(f)} \leq 1 - \varepsilon$$

im Widerspruch zur Annahme $\rho(g) = 0$. □

Die Dynamik von bijektiven Kreisabbildungen mit rationaler Rotationszahl kann man ziemlich genau beschreiben.

Satz 5.7 *Sei f ein orientierungserhaltender Homöomorphismus der Kreislinie mit rationaler Rotationszahl $\rho(f) = p/q$, mit teilerfremden natürlichen Zahlen p und q . Dann gilt:*

- (i) *Alle periodischen Punkte von f haben die minimale Periode q .*
- (ii) *Alle nichtperiodischen Punkte liegen auf heteroklinen Orbits zwischen periodischen Trajektorien. Genauer: Falls x nicht periodisch ist, dann konvergiert der Orbit von x unter f^q gegen einen Fixpunkt von f^q . Dasselbe gilt für den Rückwärtsorbit von x . Die beiden Grenzwerte stimmen nur dann überein, wenn f nur einen Fixpunkt und keine weiteren periodischen Orbits besitzt. Falls f mehr als einen periodischen Orbit besitzt, dann liegen die beiden Grenzwerte sogar auf verschiedenen q -periodischen Orbits.*

Beweis:

- (i) Sei x ein periodischer Punkt und F ein Lift von f . Dann ist $F^m(x) = x + k$ für natürliche Zahlen $m, k \in \mathbb{N}$. Dann ist $\rho(f) = k/m$ wie wir bereits gesehen haben. Es muss also eine natürliche Zahl $r \in \mathbb{N}$ geben mit $m = rq$ und $k = rp$.

Wir müssen zeigen, dass x sogar q -periodisch ist, also $F^q(x) = x + p$. Falls beispielsweise $F^q(x) - p > x$ wäre, dann wäre

$$F^{2q}(x) - 2p = F^q(F^q(x) - p) + p - 2p > F^q(x) - p > x.$$

Per Induktion zeigt man genauso, dass

$$F^{rq}(x) - rp = F^m(x) - k > x.$$

Denselben Widerspruch erhält man aus der Annahme $F^q(x) - p < x$, also muss $F^q(x) - p = x$ sein und x ist q -periodisch.

- (ii) Wir betrachten eine Fixpunkt x_* von f^q . Dann ist $f^q(x_*) = x_* + p$ für ein $p \in \mathbb{N}$. Ein Lift F von $f^q - p$ bildet daher das Intervall $[x_*, x_* + 1]$ bijektiv auf sich ab. In den Übungen haben wir für solche monotonen stetigen Intervallabbildungen gezeigt, dass jeder Punkt entweder Fixpunkt ist oder zu einem heteroklinen Orbit gehört. In diesem Fall verbindet der heterokline Orbit zwei benachbarte Fixpunkte a, b von f^q . Falls diese zum selben periodischen Orbit gehören, dann überdeckt die Vereinigung der Iterierten von (a, b) die ganze Kreislinie außer dem periodischen Orbit selbst. Da das Intervall (a, b) aber keine periodischen Punkte enthält, kann es keine weiteren periodischen Orbits geben.

□

5.4 Der Satz von Denjoy

Im Fall irrationaler Rotationszahlen kann man die Dynamik sogar noch besser beschreiben. Ziel dieses Abschnitts ist es zu zeigen, dass f in diesem Fall semi-konjugiert zu einer reinen Drehung $R_{\rho(f)}$ ist.

Anschließend werden wir dann sehen, dass f für C^2 -Diffeomorphismen sogar C^0 -konjugiert ist zu einer Drehung. Denjoy hat ein Beispiel konstruiert, das zeigt, dass diese Aussage für C^1 -Diffeomorphismen im allgemeinen falsch ist, dies werden wir hier aber nicht beweisen.

Wir beginnen mit zwei vorbereitenden Lemmata.

Das erste liefert uns eine alternative Charakterisierung der Rotationszahl, auf die wir im Beweis zurückgreifen werden.

Lemma: *Es gilt*

$$\rho(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{0 \leq i < n; f^i(y) \in [z, f(z)]\}}{n}.$$

Beweis: Bei jedem Umlauf eines Orbits wird das Intervall $[z, f(z))$ genau einmal besucht.

□

Eine weitere wichtige Beobachtung besteht darin, dass die Iterierten von f auf der Kreislinie genauso angeordnet sind wie die Iterierten von $R_{\rho(f)}$.

Lemma: Sei $f : S^1 \rightarrow S^1$ ein orientierungserhaltender Homöomorphismus der Kreislinie mit irrationaler Rotationszahl $\rho(f)$ und F ein Lift von f . Falls $F^j(x_0) + m_j < F^k(x_0) + m_k$ für $m_j, m_k \in \mathbb{Z}$, dann ist $j\rho(f) + m_j < k\rho(f) + m_k$.

Beweis des Lemmas: Setzt man $F^k(x_0) =: X_k$, so ist $F^{j-k}(X_k) - X_k < m_k - m_j$. Die Ungleichung $F^{j-k}(x) - x < m_k - m_j$ gilt sogar für alle $x \in S^1$, sonst gäbe es einen Punkt \tilde{x} mit $F^{j-k}(\tilde{x}) = \tilde{x} + m_k - m_j$. Die Existenz eines solchen periodischen Punktes steht aber im Widerspruch zur irrationalen Rotationszahl von f . Speziell für $x = 0$ und $x = F^{j-k}(0)$ bedeutet dies

$$F^{j-k}(0) < m_k - m_j$$

und

$$F^{2(j-k)}(0) < F^{j-k}(0) + m_k - m_j < 2(m_k - m_j).$$

Per Induktion zeigt man genauso, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$F^{n(j-k)}(0) < n(m_k - m_j)$$

und daher

$$\rho(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^{n(j-k)}(0)}{n(j-k)} \leq \frac{m_k - m_j}{j-k}$$

wobei die Ungleichung sogar echt sein muss, da die Rotationszahl irrational ist. Damit ist die Behauptung bewiesen. \square

Satz 5.8 Sei $f : S^1 \rightarrow S^1$ ein orientierungserhaltender Homöomorphismus der Kreislinie mit Rotationszahl $\rho(f) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Dann ist f semi-konjugiert zu einer Drehung $R_{\rho(f)}$. Es existiert also eine stetige, surjektive, monotone Abbildung $h : S^1 \rightarrow S^1$, so dass gilt:

$$h \circ f = R_{\rho(f)} \circ h.$$

Beweis von Satz 5.8: Wähle $x_0 \in S^1$ fest, und setze $x_n := f^n(x_0)$. Wir wollen h so wählen, dass $h(x_0) = x_0$ ist. (Das ist keine Einschränkung, da wir im Fall $h(x_0) = x + \alpha$ den Homöomorphismus h durch $R_{-\alpha} \circ h$ ersetzen können.) Wir können sogar $x_0 = 0$ voraussetzen.

Damit die Relation $h \circ f = R_{\rho(f)} \circ h$ für x_1, x_2, \dots gilt, muss natürlich

$$h(x_n) = n\rho(f) \pmod{1}$$

sein.

Insbesondere gilt also: Falls $x_j < x_k < x_\ell < x_j + 1$, dann ist

$$F^j(0) < F^k(0) + m_k < F^\ell(0) + m_\ell < F^j(0) + 1$$

und damit auch $j\rho(f) < k\rho(f) + m_k < \ell\rho(f) + m_\ell < j\rho(f) + 1$, die Punkte x_0, x_1, x_2, \dots sind auf der Kreislinie also genauso angeordnet wie die Punkte $0, \rho(f), 2\rho(f), \dots$

Wir wissen aus dem Birkhoffschen Ergodensatz, dass für die Drehung $R_{\rho(f)}$ um den irrationalen Winkel $\rho(f)$ die Menge $\{j\rho(f) \in S^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}; j \in \mathbb{N}\}$ dicht ist und dass sogar für alle $y \in S^1$ gilt:

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{0 \leq j < n; j\rho(f) \in [0, y)\}}{n}.$$

Es ist also für alle $y \in S^1$

$$h(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{0 \leq j < n; f^j(0) \in [0, y)\}}{n}.$$

h ist monoton: Die Abbildung h ist monoton wachsend, denn ein größeres y bedeutet ein größeres Intervall $[0, y)$, in das der Orbit fallen darf.

h ist stetig: Argumentiere dazu indirekt und nimm an, dass h im Punkt y_0 nicht stetig ist. Dann existiert eine Zahl $\delta > 0$ so dass für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{0 \leq j < n; f^j(0) \in [y_0, y_0 + \frac{1}{m})\}}{n} \geq \delta > 0.$$

Dann gibt es aber zu jedem $m \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen $N_m < 1/\delta$ und k_m , so dass $p_m := f^{k_m}(0)$ und $f^{N_m}(p_m) = f^{k_m+N_m}(0)$ beide im Intervall $[y_0, y_0 + \frac{1}{m})$ liegen. Nun können wir wegen der Kompaktheit der Kreislinie eine konvergente Teilfolge $p_{m_j} \rightarrow p$ finden, für die zusätzlich die Zahlen $N := N_{m_j}$ übereinstimmen. Aus der Stetigkeit von f bzw. von f^N folgt nun, dass $f^N(p) = p$ ist. Dann wäre aber die Rotationszahl $\rho(f)$ rational. Aus diesem Widerspruch folgt, dass h stetig sein muss.

h ist surjektiv: Dies folgt unmittelbar aus der Stetigkeit mit Hilfe des Zwischenwertsatzes.

h und $R_{\rho(f)}$ sind semi-konjugiert zueinander: Wir müssen zeigen, dass

$$h(f(y)) = h(y) + \rho(f) \pmod{1} = R_{\rho(f)}(h(y)).$$

Dazu unterscheiden wir zwei Fälle:

1. $0 \leq y < f(y) \leq 1$

In diesem Fall ist

$$\begin{aligned} h(f(y)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{0 \leq j < n; f^j(0) \in [0, f(y))\}}{n} \\ &= \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{0 \leq j < n; f^j(0) \in [0, y)\}}{n}}_{=h(y)} + \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{0 \leq j < n; f^j(0) \in [y, f(y))\}}{n}}_{=\rho(f)} \end{aligned}$$

2. $0 < f(y) < y < 1$

Jeder Punkt gehört zu mindestens einem der Intervalle $[0, y)$ und $[y, f(y))$, die Punkte in $[0, f(y))$ gehören zu beiden Intervallen. Es gilt also

$$\begin{aligned} h(f(y)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{0 \leq j < n; f^j(0) \in [0, f(y))\}}{n} \\ &= \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{0 \leq j < n; f^j(0) \in [0, y)\}}{n}}_{=h(y)} + \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{0 \leq j < n; f^j(0) \in [y, f(y))\}}{n}}_{=\rho(f)} - 1 \end{aligned}$$

da in der letzten Summe jeder Punkt genau dann zweimal gezählt wird, falls er zu $[0, f(y))$ gehört.

□

Die Frage ist nun natürlich, wann h auch injektiv, also ein Homöomorphismus ist. Da h monoton ist, kann es höchstens passieren, dass h ein ganzes Intervall auf einen einzigen Punkt abbildet.

Definition: Sei $g : S^1 \rightarrow S^1$ eine Abbildung. Die **totale Variation** von g ist

$$TV(g) := \sup \sum_{i=0}^{n-1} |g(x_{i+1}) - g(x_i)|$$

wobei das Supremum über alle Partitionen $0 = x_1 < x_2 < \dots < x_n = 1$ genommen wird. Falls $TV(g) < \infty$, dann heißt g von beschränkter Variation.

Insbesondere ist nach dem Mittelwertsatz $g : S^1 \rightarrow S^1$ von beschränkter Variation, falls $g \in C^1$ ist.

Wir werden dies wie folgt benutzen: Falls g ein C^2 -Diffeomorphismus ist, dann ist die Abbildung $x \mapsto \log(g'(x))$ von beschränkter Variation, da die Ableitung

$$\frac{d}{dx} \log(g'(x)) = \frac{g''(x)}{g'(x)}$$

in diesem Fall eine stetige Funktion ist.

Definition: Sei $f : S^1 \rightarrow S^1$ ein Diffeomorphismus. Dann heißt I ein **wanderndes Intervall**, falls $f^n(I) \cap I = \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Ein paar wichtige Konsequenzen

Lemma 5.9 Sei $f : S^1 \rightarrow S^1$ ein Diffeomorphismus und I ein wanderndes Intervall. Dann gilt

(i) $f^n(I) \cap f^m(I) = \emptyset$ für alle $n, m \in \mathbb{Z}$

(ii) Für die Länge der Iterierten von I gilt

$$|f^n(I)| \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad n \rightarrow \pm\infty.$$

(iii) Sei h wie in Satz 5.8. Dann bildet h jedes der Intervalle $f^n(I)$ auf einen Punkt ab.

Beweis:

(i) Da f ein Diffeomorphismus ist, folgt aus $f^n(I) \cap f^m(I) \neq \emptyset$ sofort $f^{|n-m|}(I) \cap I \neq \emptyset$, im Widerspruch zur Definition eines wandernden Intervalls.

(ii) klar

- (iii) Falls $h(I) =: J$ ein Intervall ist, das aus mehr als einem Punkt besteht, dann können $J, R_{\rho(f)}(J), R_{\rho(f)}^2(J), \dots$ nicht lauter disjunkte Intervalle sein. Insbesondere gibt es dann $m \in \mathbb{N}$, so dass $J \cap R_{\rho(f)}^m(J)$ ein Intervall ist. Wegen $h \circ f = R_{\rho(f)} \circ h$ (siehe Satz 5.8) bedeutet dies, dass $h(I) \cap h(f^n(I))$ ein nichttriviales Intervall ist. Da h monoton ist, ergibt sich daraus ein Widerspruch zur Annahme, dass I und $f^n(I)$ disjunkt sind.

□

Lemma 5.10 Sei $f : S^1 \rightarrow S^1$ ein C^2 -Diffeomorphismus der Kreislinie mit irrationaler Rotationszahl. Dann besitzt f keine wandernden Intervalle.

Beweis: Wir wollen einen Widerspruch zur Tatsache

$$\frac{|f^n(I)|}{|I|} \rightarrow 0$$

aus Lemma 5.9 (ii) konstruieren.

Zunächst findet man mit Hilfe des Mittelwertsatzes zu einem festen $n \in \mathbb{N}$ Zahlen $\xi_1, \xi_2 \in S^1$ mit

$$\frac{|f^n(I)|}{|I|} = |(f^n)'(\xi_1)|$$

und

$$\frac{|f^{-n}(I)|}{|I|} = \frac{1}{|(f^n)'(\xi_2)|}$$

mit $\xi_1 \in I$ und $\xi_2 \in f^{-n}(I)$. Nach der Kettenregel ist

$$|(f^n)'(\xi)| = |f'(f^{n-1}(\xi)) \cdot \dots \cdot f'(\xi)|$$

und daher

$$|\log(f^n)'(\xi)| = \sum_{i=0}^{n-1} \log |f'(f^i(\xi))|.$$

Subtrahiert man diese Gleichung für ξ_1 und ξ_2 , so erhält man die Ungleichung

$$\begin{aligned} \log \left(\frac{|f^n(I)| \cdot |f^{-n}(I)|}{|I|^2} \right) &= \log(f^n)'(\xi_1) - \log(f^n)'(\xi_2) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (\log |f'(f^i(\xi_1))| - \log |f'(f^i(\xi_2))|). \end{aligned}$$

Seien nun $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{2n}$ die Punkte aus der Menge $\{f^i(\xi_1); 0 \leq i \leq n-1\} \cup \{f^i(\xi_2); 0 \leq i \leq n-1\}$. Die Strategie besteht nun darin, die Summe

$$\sum_{i=0}^{n-1} |\log |f'(f^i(\xi_1))| - \log |f'(f^i(\xi_2))|| \leq \sum_{i=1}^{2n-1} |\log |f'(x_{i+1})| - \log |f'(x_i)||$$

als untere Schranke für die totale Variation von $\log |f'|$ aufzufassen. Da die linke Seite für $n \rightarrow \infty$ gegen unendlich strebt, ergibt sich dann ein Widerspruch zur Tatsache, dass $\log |f'|$ für $f \in C^2$ von beschränkter Variation ist.

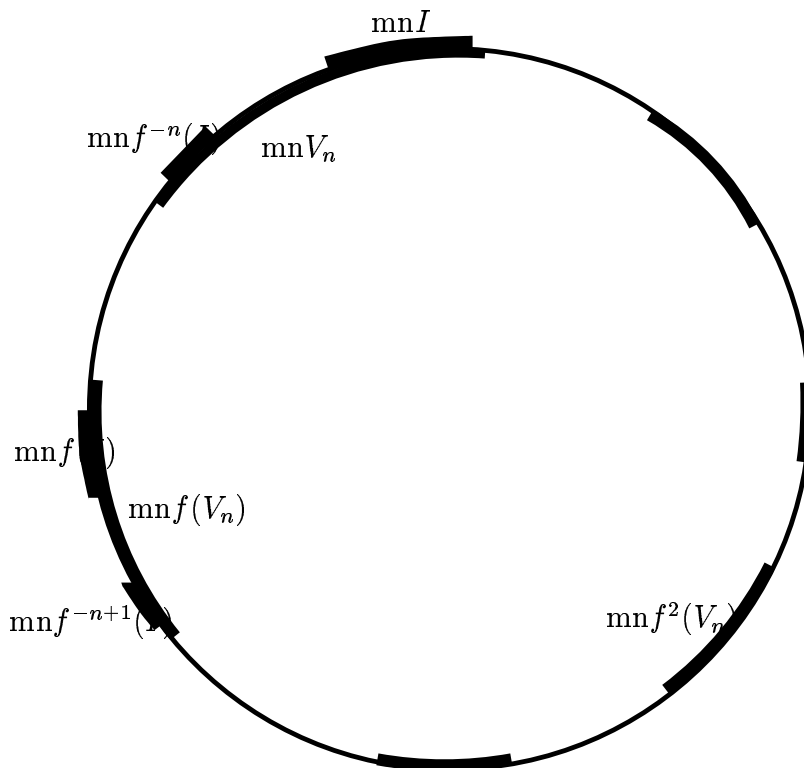
Wir wollen nur noch zeigen, dass für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ unter den $2n$ Punkten $x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{2n}$ die Punkte $f^i(\xi_1)$ und $f^i(\xi_2)$ benachbart sind. Dann ist

$$\sum_{i=0}^{n-1} |\log |f'(f^i(\xi_1))| - \log |f'(f^i(\xi_2))|| \leq \sum_{j=1}^{2n-1} |\log |f'(x_{j+1})| - \log |f'(x_j)||$$

da in der linken Summe einige Terme fehlen, die in der rechten Summe vorkommen.

Um zu zeigen, dass für geeignete $n \in \mathbb{N}$ die Punkte $f^i(\xi_1)$ und $f^i(\xi_2)$ tatsächlich benachbart sind, betrachten wir ein Intervall V_n , das die beiden Intervalle I und $f^{-n}(I)$ enthält. Auf der Kreislinie gibt es natürlich zwei solche Intervalle. Wir wählen davon dasjenige aus, das *nicht* das Intervall $f(I)$ enthält. Dabei benutzen wir, dass I ein wanderndes Intervall ist. Dann enthält das Intervall $f^i(V_n)$ die Intervalle $f^i(I)$ und $f^{-n+i}(I)$ und damit insbesondere die Punkte $f^i(\xi_1)$ und $f^i(\xi_2)$.

Es bleibt zu zeigen, dass es beliebig große $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass die Intervalle $V_n, f(V_n), \dots, f^{n-1}(V_n)$ disjunkt sind, d.h., dass keines der Intervalle $f^{-(n-1)}(I), \dots, f^{-1}(I), f(I), f^2(I), \dots, f^{n-1}(I)$ zwischen I und $f^{-n}(I)$ liegt.



Aus Lemma 5.9(iii) wissen wir, dass die Semikonjugation h das ganze Intervall I auf einen Punkt a abbildet.

Da $\rho(f)$ irrational ist, gibt es beliebig große $n \in \mathbb{N}$, so dass $|R_{\rho(f)}^m(a) - a| < |R_{\rho(f)}^i(a) - a|$ für alle $|i| < n$. Für diese n gilt dann tatsächlich dass

$$V_n \cap (\cup_{1 \leq |j| < n} f^j(I)) = \emptyset.$$

Betrachtet man nun eine Folge solcher n , dann schließt man, dass $\log |f'|$ nicht von beschränkter Variation sein kann. Da dies für C^2 -Diffeomorphismen falsch ist, muss unsere Anfangsannahme falsch gewesen sein und f kann kein wanderndes Intervall I besitzen. \square

Satz 5.11 (Denjoy) Sei $f : S^1 \rightarrow S^1$ ein C^2 -Diffeomorphismus mit irrationaler Rotationszahl $\rho(f) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Dann ist f konjugiert zur Drehung $R_{\rho(f)}$.

Beweis: Wir müssen zeigen, dass h aus Satz 5.8 injektiv ist.

1. Schritt: Die Einschränkung von h auf $\{f^n(0); n \in \mathbb{N}\}$ ist injektiv:

Angenommen es ist

$$h(f^n(0)) = h(f^m(0)),$$

dann ist wegen der Semi-Konjugation

$$R_{n\rho(f)}(h(0)) = R_{m\rho(f)}(h(0))$$

woraus wieder folgen würde, dass $\rho(f)$ rational ist.

2. Schritt: Falls die Menge $\{f^n(0); n \in \mathbb{N}\}$ dicht ist in S^1 , dann ist h injektiv.

Da die Menge $\{f^n(0)\}$ dicht ist, findet man für zwei beliebige Punkte $y \neq y'$ immer zwei Punkte aus der Menge $\{f^n(0)\}$ in jeder der beiden Komponenten von $S^1 \setminus \{y, y'\}$. Die Bilder dieser 4 Punkte unter h sind alle verschieden. Da h die Orientierung erhält, müssen $h(y)$ und $h(y')$ verschieden voneinander sein.

3. Schritt: Die Menge $\{f^n(0); n \in \mathbb{N}\}$ ist dicht, falls f keine wandernden Intervalle besitzt.

Wir argumentieren indirekt und nehmen an, dass $X = \overline{\{f^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}} \neq S^1$. Wähle dann eine Zusammenhangskomponente U aus dem (offenen) Komplement Y von X . Für alle $i \in \mathbb{Z}$ ist $f^i(U)$ ebenfalls eine Zusammenhangskomponente, denn $f(Y) = Y$.

Die Intervalle $f^i(U)$ können auch nicht alle disjunkt sein, da ansonsten U ein wanderndes Intervall wäre. Es ist also $f^i(U) \cap f^j(U) \neq \emptyset$ für Zahlen $i, j \in \mathbb{Z}$. Da beide Mengen Zusammenhangskomponenten von Y sind gilt sogar $f^i(U) = f^j(U)$.

Damit ist aber $f^{i-j}(U) = U$ und f^{i-j} besitzt einen Fixpunkt in \overline{U} , im Widerspruch zur irrationalen Rotationszahl.

Damit sind wir fertig, denn die Tatsache, dass f keine wandernden Intervalle besitzt, haben wir bereits im vorigen Lemma 5.10 bewiesen. \square

Unmittelbar ergibt sich dann

Korollar 5.12 Sei f ein C^2 -Diffeomorphismus mit irrationaler Rotationszahl. Für alle $x \in S^1$ ist dann

$$\overline{\{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}} = \omega(x) = \alpha(x) = S^1.$$

5.5 Stetige Abhängigkeit und Teufelstreppe

Wenn man eine geeignete Norm wählt, dann bewirken kleine Störungen der Abbildung f auch nur eine kleine Änderung der Rotationszahl.

Lemma: Betrachte den Raum M der orientierungserhaltenden Homöomorphismen der Kreislinie mit der C^0 -Norm

$$\|f\|_{C^0} := \sup_{x \in S^1} |f(x)|.$$

Dann hängt die Rotationszahl $\rho(f)$ bezüglich dieser Norm stetig von f ab.

Beweis: Wir zeigen Stetigkeit im Punkt $f_0 \in M$. Sei dazu $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $k \in \mathbb{N}$ mit $k > 1/\varepsilon$ und $r \in \mathbb{Z}$ mit

$$\frac{r}{k} < \rho(f_0) < \frac{r+1}{k}.$$

Sei F_0 der eindeutige Lift von f_0 , für den gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_0^n(x) - x}{n} = \rho(f_0).$$

Behauptung: Es ist $F_0^k(x) > x + r$ für alle $x \in S^1$.

Wir unterscheiden dabei zwei Fälle:

Fall 1: Falls diese Ungleichung für gewisse, aber nicht für alle x gilt, dann existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $x_0 \in S^1$ mit $F_0^k(x_0) = x_0 + r$. Insbesondere ist dann

$$\rho(f_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_0^{kn}(x_0) - x_0}{kn} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_0 + rn - x_0}{kn} = \frac{r}{k}$$

im Widerspruch zur Wahl von k und r .

Fall 2: Falls sogar $F_0^k(x) < x + r$ gilt für alle x , dann zeigt man analog, dass $\rho(f_0) < r/k$

Ganz genauso kann man zeigen, dass $F_0^k(x) < x + r + 1$ für alle $x \in S^1$.

Da $F_0^k - x$ Maximum und Minimum auf der (kompakten) Kreislinie annimmt, lässt sich eine Zahl $\eta > 0$ finden, so dass für alle $x \in S^1$

$$r + \eta < F_0^k(x) - x < r + 1 - \eta.$$

Sei $\delta > 0$ nun so klein gewählt, dass

$$\|f - f_0\|_{C^0} < \delta \quad \Rightarrow \quad |F^k(x) - F_0^k(x)| < \eta \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

wobei F der Lift zur Abbildung f ist. Insbesondere ist dann

$$r < F^k(x) - x < r + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

und mit derselben Argumentation wie oben folgt daraus

$$\frac{r}{k} < \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x)}{n}}_{=\rho(f)} < \frac{r+1}{k}$$

und schließlich

$$|\rho(f) - \rho(f_0)| < \frac{1}{k} < \varepsilon.$$

□

Allerdings gibt es, wie schon oben beobachtet, große Unterschiede, je nachdem, ob die Rotationszahl rational oder irrational ist.

Satz 5.13 (Stabilität rationaler Rotationszahlen) Sei $f_0 : S^1 \rightarrow S^1$ ein Homöomorphismus der Kreislinie. Falls $\rho(f_0) \in \mathbb{Q}$ und f_0 periodische Trajektorien besitzt, die asymptotisch stabil oder asymptotisch instabil sind, dann ist ρ lokal konstant, d.h. für f nahe an f_0 ist $\rho(f) = \rho(f_0)$.

Falls $\rho(f) \notin \mathbb{Q}$, dann gibt es immer Störungen, die die Rotationszahl ändern.

Man kann eine Ordnung auf den orientierungserhaltenden Homöomorphismen einführen und eine Familie f_λ von Abbildungen betrachten, die bezüglich dieser Ordnung streng wachsend ist.

Es lässt sich zeigen, dass dann auch die Rotationszahl monoton wachsend ist. Der Graph der Rotationszahl $\rho(f_\lambda)$ aufgetragen über λ ist dann eine stetige monotone Funktion, die lokal konstant ist bei jedem $\rho(f_\lambda) \in \mathbb{Q}$. Ein solcher Graph heißt auch **Teufelstreppe**. Der Begriff Teufelstreppe kommt daher, dass der Graph zwar unendlich viele Plateaus (Stufen), aber keine Sprünge hat.

5.6 Flüsse auf dem Torus

Kreisabbildung erhält man ganz typischerweise als Poincaré–Abbildungen von Flüssen auf dem Torus. Allerdings liefert nicht jeder solche Fluss eine Kreisabbildung. Voraussetzung ist die Existenz eines **globalen transversalen Schnitts**. Man kann zeigen, dass ein solche Schnitt immer existiert, wenn der Fluss weder Ruhelagen noch periodische Orbits besitzt.

Eine andere Möglichkeit ist vorauszusetzen, dass alle Trajektorien immer eine horizontale „Mindestgeschwindigkeit“ besitzen.

Betrachte beispielsweise

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha(x, y) \\ \dot{y} &= \beta(x, y)\end{aligned}$$

mit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und doppelt-periodischen Funktionen α, β :

$$\alpha(x + j, y + k) = \alpha(x, y) \quad \text{und} \quad \beta(x + j, y + k) = \beta(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall j, k \in \mathbb{Z}.$$

Dann induziert der zugehörige Fluss Φ_t einen Fluss $\hat{\Phi}_t$ auf dem Torus \mathbb{T}^2 . Setzt man voraus, dass

$$\alpha(x, y) > 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

dann ist die Kreislinie $S = \{x = 0\} \sim S^1 \subset \mathbb{T}^2$ ein globaler Schnitt und die Poincaré–Abbildung \mathcal{P} , die jedem Punkt auf S den nächsten Schnittpunkt der Trajektorie mit S zuordnet ist ein Homöomorphismus der Kreislinie S .

Insbesondere entspricht der lineare Fluss

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha \\ \dot{y} &= \beta\end{aligned}$$

der Poincaré–Abbildung $\mathcal{P}(x) = x + \beta/\alpha$ und falls $\beta/\alpha \notin \mathbb{Q}$, dann liegen alle Trajektorien der linearen Differentialgleichung dicht auf dem Torus.

Etwas allgemeiner gilt dies für lineare Differentialgleichungen

$$\dot{x} = \omega \in \mathbb{R}^n$$

mit $x \in \mathbb{T}^n$ auf dem n -Torus, wenn die Komponenten von ω (“Frequenzen”) rational unabhängig sind, d.h., wenn für beliebige Vektoren $k \in \mathbb{Z}^n$ gilt:

$$\langle k, \omega \rangle = 0 \iff k = 0.$$

In diesem Fall sind alle Trajektorien **quasi-periodisch** und liegen dicht im gesamten n -Torus.

Solche “irrationalen Tori” treten beispielsweise bei der Untersuchung von Hamilton-Systemen auf. Die KAM-Theorie (**K**olmogorov-**A**rnold-**M**oser-Theorie) beschäftigt sich mit der Frage, ob und wenn ja wie viele dieser Tori erhalten bleiben, wenn man eine kleine Störung zu dem System hinzufügt.