6 Stabile und instabile Mannigfaltigkeiten

In diesem Kapitel kehren wir endlich auch wieder zu kontinuierlichen Dynamischen Systemen zurück. Zunächst soll an zwei Resultate aus der Vorlesung „Dynamik I“ erinnert werden, in denen das lokale Verhalten von Lösungen einer gewöhnlichen Differentialgleichung untersucht wird.
Ein Zugang besteht darin, die Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x)$$

durch eine Koordinatentransformation $y = \Psi(x)$ so umzuformen, dass die neue Differentialgleichung

$$\dot{y} = D\Psi(x)\dot{x} = D\Psi(\Psi^{-1}(y)) \cdot f(\Psi^{-1}(y)).$$

für y möglichst „einfach“ wird.
Falls $f(x_0) \neq 0$ ist, dann läst sich die Differentialgleichung so transformieren, dass das Vektorfeld in einer Umgebung von x_0 konstant ist. Die Trajektorien sind dann parallele Geraden:

Satz 6.1 (Satz von der Begradigung, flow box theorem)
Sei $U \subseteq X = \mathbb{R}^n$ und $f : U \to X$ ein C^1-Vektorfeld und $x_0 \in U$ ein Punkt mit $f(x_0) \neq 0$. Dann existiert eine offene Umgebung V von x_0, eine Umgebung W von $0 \in \mathbb{R}^n$ und ein C^1-Diffeomorphismus $\Psi : V \to W$, so dass für das transformierte Vektorfeld gilt:

$$\dot{y} \equiv f(x_0) \qquad \forall y \in W.$$

Es bleibt noch die Aufgabe, die Struktur von Vektorfeldern in der Umgebung einer Ruhelage zu verstehen. Der Satz von Grobman-Hartman untersucht, wann Vektorfelder in der Nähe eines Gleichgewichts so aussehen, wie ein lineares Vektorfeld, genauer: welche Vektorfelder sind C^0–konjugiert zu einem linearen Vektorfeld ?

Definition: Eine $n \times n$–Matrix A heißt **hyperbolisch**, falls kein Eigenwert von A auf der imaginären Achse liegt:

$$\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset.$$

Der Raum $\mathbb{R}^n$ zerfällt dann in zwei invariante Unterräume:

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u, \qquad AE^s = E^s, \quad AE^u = E^u.$$

Diese Unterräume heißen **stabiler** und **instabiler Unterraum**.
Ein Gleichgewicht x_0 einer Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ heißt **hyperbolisch**, falls die Linearisierung $Df(x_0)$ keine Eigenwerte auf der imaginären Achse besitzt.

Satz 6.2 (Grobman-Hartman) *Sei $x = 0$ ein hyperbolisches Gleichgewicht von*

$$\dot{x} = f(x),$$

d.h. $f(0) = 0$ und $\operatorname{Re}\sigma(Df(0)) \neq 0$. Dann ist der zugehörige Fluss Φ_t lokal C^0-konjugiert zum Fluss der Linearisierung

$$\dot{x} = Df(0)x =: Ax$$

von f in $x = 0$, das heißt es existiert ein lokaler Homöomorphismus h mit

$$e^{At} \circ h = h \circ \Phi_t.$$

Ein analoger Satz gilt übrigens auch für Abbildungen.
Ein großes Manko dieses Satzes ist die Tatsache, dass h nur stetig ist. Dadurch gehen viele qualitative Informationen verloren, z.B. bleiben Eigenwerten nicht erhalten oder Transversalität kann verloren gehen. Außerdem ist von h im allgemeinen nur die Existenz bekannt.
Manchmal ist man gar nicht so sehr daran interessiert, den Fluss durch eine Koordinatentransformation vollständig zu linearisieren, sondern möchte nur diejenigen Lösungen in der Nähe einer Ruhelage beschreiben, die für $t \to \infty$ gegen dieses Gleichgewicht konvergieren. Wir wissen schon, dass *alle* Lösungen gegen das Gleichgewicht konvergieren, falls die Linearisierung im Gleichgewicht nur Eigenwerte mit echt negativem Realteil besitzt. Falls diese Bedingung nicht erfüllt ist, dann konvergieren normalerweise die meisten Trajektorien nicht gegen das Gleichgewicht.
Bei *linearen* Differentialgleichungen liegen diejenigen Trajektorien, die für $t \to \infty$ gegen $x = 0$ konvergieren in einem Unterraum, dem verallgemeinerten Eigenraum zu den Eigenwerten mit negativem Realteil.
Der folgende Satz besagt, dass sich dieses Bild für nichtlineare Gleichungen nur „verbiegt", aber nicht entscheidend ändert: Statt linearer Unterräume existieren nun Mannigfaltigkeiten, die alle Lösungen enthalten, die für $t \to \infty$ gegen $x = 0$ konvergieren.

Satz 6.3 (Stabile Mannigfaltigkeit, lokal)
Betrachte die autonome Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x)$$

mit $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und $f(0) = 0$. Die Linearisierung $A := Df(0)$ sei hyperbolisch, habe also keine Eigenwerte auf der imaginären Achse. Sei $\sigma^s := \sigma(A) \cap \{\mathrm{Re} z < 0\}$ und $\sigma^u := \sigma(A) \cap \{\mathrm{Re} z > 0\}$ und E^s, E^u seien die stabilen bzw. instabilen Eigenräume von A.
Dann existiert eine Umgebung U von $x = 0$ in E^s und eine Funktion $\Psi \in C^1(U, E^u)$, so dass die **lokale stabile Mannigfaltigkeit**

$$W^s_{loc}(0) := \mathrm{graph}(\Psi) = \{(x^s, x^u);\ x^u = \Psi(x^s)\}$$

die folgenden Eigenschaften besitzt:
(i) $W^s_{loc}(0)$ ist positiv invariant, d.h. $x_0 \in W^s_{loc}(0) \Rightarrow \Phi_t(x_0) \in W^s_{loc}(0)$ für alle $t \geq 0$.
Es existieren sogar Konstanten K, $\eta > 0$, so dass

$$|\Phi_t(x_0)| \leq K e^{-\eta t} |x_0|$$

für $x_0 \in W^s_{loc}(0)$.
(ii) Umgekehrt ist jede Lösung, die für alle Zeiten $t \geq 0$ in einer kleinen Umgebung von $x = 0$ bleibt, in $W^s_{loc}(0)$ enthalten.

Der Beweis zerfällt in mehrere Schritte. Zunächst werden wir W^s_{loc}, bzw. die Abbildung Ψ konstruieren und erst anschließend nachweisen, dass alle Eigenschaften erfüllt sind. Für die Konstruktion modifizieren wir zunächst das Vektorfeld, so dass es außerhalb einer Umgebung von $x = 0$ linear ist. Dann schreiben wir die Differentialgleichung als Integralgleichung und benutzen schließlich den Banachschen Fixpunktsatz.

Notation: Wir zerlegen wieder $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$ und bezeichnen mit $P : E^s \oplus E^u \to E^s$ die Projektion auf den stabilen Unterraum E^s. Analog sei $Q := (\mathrm{Id} - P) : E^s \oplus E^u \to E^u$ die Projektion auf den instabilen Unterraum. Für $x \in \mathbb{R}^n$ schreiben wir $x^s := Px$ und $x^u := Qx$.
Insbesondere gibt es wegen der Hyperbolizität von A Konstanten C, $\delta > 0$, so dass die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|e^{At}P\| &\leq Ce^{-\delta t} \quad \text{für } t \geq 0, \\ \|e^{At}Q\| &\leq Ce^{\delta t} \quad \text{für } t \leq 0 \end{aligned}$$

gelten. Als Norm wählt man auf der linken Seite irgendeine der (äquivalenten) Matrix-Normen, beispielsweise $\|A\| = \max |a_{ij}|$.
Man stellt sich dazu A am besten in Jordan–Normalform vor. Dann hat A Blockdiagonalgestalt (jeweils ein Block zu Re $\lambda > 0$ und Re $\lambda < 0$) und diese Blockdiagonalgestalt vererbt sich auf die Matrix e^{At}. Ihre Einträge sind von der Form „$e^{\lambda t}\cdot$ Polynom(t)“, woraus sich die Abschätzungen dann direkt ergeben.
Zurück zu unserer nichtlinearen Gleichung $\dot{x} = f(x)$. Mit $g(x) := f(x) - Ax$ bezeichnen wir den nichtlinearen Anteil von f. Wir betrachten von nun an also die Gleichung

$$\dot{x} = Ax + g(x). \tag{1}$$

Angenommen wir haben eine Lösung $x(\cdot)$ auf dem Intervall $[0,t]$ gefunden, dann gilt nach der Variation–der–Konstanten–Formel

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}g(x(\tau))\,d\tau.$$

Mit Hilfe der Projektionen P und $Q = \mathrm{Id} - P$ zerlegen wir diese Gleichung in das äquivalente System

$$\begin{aligned} x^s(t) = Px(t) &= e^{At}Px(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Pg(x(\tau))\,d\tau \\ x^u(t) = Qx(t) &= e^{At}Qx(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Qg(x(\tau))\,d\tau. \end{aligned}$$

Für beschränkte Lösungen können wir diese Gleichungen noch etwas vereinfachen:

Lemma 6.4 *Falls $x(t)$ eine Lösung von (1) ist, die für alle $t \geq 0$ gleichmäßig beschränkt bleibt, dann erfüllt $x(t) = (x^s(t), x^u(t))$ die Integralgleichung*

$$\begin{aligned} x^s(t) &= e^{At}Px(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Pg(x(\tau))\,d\tau \\ x^u(t) &= -\int_t^\infty e^{A(t-\tau)}Qg(x(\tau))\,d\tau. \end{aligned}$$

Umgekehrt gilt: Falls $(x^s(t), x^u(t)) \in E^s \times E^u$ eine beschränkte Lösung dieser Integralgleichung sind, dann ist $x(t)$ eine beschränkte Lösung von (1) für alle $t \geq 0$.

Beweis des Lemmas: Für festes $t \geq 0$ und beliebiges $T > t$ gilt:

$$\begin{aligned} x^u(T) &= e^{A(T-t)}x^u(t) + \int_t^T e^{A(T-\tau)}Qg(x(\tau))\,d\tau \\ x^u(t) &= e^{A(t-T)}x^u(T) + \int_T^t e^{A(t-\tau)}Qg(x(\tau))\,d\tau. \end{aligned}$$

Nun gilt

$$|e^{A(t-T)}x^u(T)| \leq \|e^{A(t-T)}\|\,|x^u(T)| \leq Ce^{-\delta(t-T)}|x^u(T)|.$$

Für $T \to +\infty$ strebt dieser Term gegen 0, da ja x^u beschränkt ist. Der zweite Term strebt gegen $\int_\infty^t e^{A(t-\tau)}Qg(x(\tau))\,d\tau$. Dieses uneigentliche Integral ist absolut konvergent, da

$$|e^{A(t-\tau)}Qg(x(\tau))| \leq \|e^{A(t-\tau)}Q\|\,|g(x(\tau))| \leq Ce^{\delta(t-\tau)}|g(x(\tau))| \text{ für } \tau \geq t.$$

Umgekehrt rechnet man durch Differenzieren nach, dass jede Lösung der Integralgleichung eine Lösung von (1) liefert. □

Beweis des Satzes über die stabile Mannigfaltigkeit:
Da wir uns nur für Lösungen in einer kleinen Umgebung von $x = 0$ interessieren, können wir $\|g\|_{BC^0}$ und die Lipschitz–Konstante von g beliebig klein machen, indem wir g durch $g(x) \cdot \chi(|x|)$ ersetzen mit einer Abschneidefunktion $\chi \in C^k$ für die gilt:

$$\begin{aligned} \chi(x) &= \begin{cases} 1 & \text{für } |x| \leq r, \\ 0 & \text{für } |x| \geq 2r \end{cases} \\ \text{sowie} \qquad |\nabla\chi| &\leq 2/r. \end{aligned}$$

Durch Wahl von r können wir zudem erreichen, dass für die Lipschitz-Konstante von g gilt:

$$\operatorname{Lip}(g) < \frac{\delta}{4C}.$$

Wir definieren nun eine Abbildung

$$T(x^s, x^u) := \begin{pmatrix} e^{At}x_0^s + \int_0^t e^{A(t-s)}Pg(x^s(\tau) + x^u(\tau))\,d\tau \\ -\int_t^\infty e^{A(t-s)}Qg(x^s + x^u)\,d\tau \end{pmatrix}$$

durch die rechte Seite der Integralgleichung aus dem obigen Lemma mit festem x_0^s. Fixpunkte von T sind dann Lösungen der Integralgleichung.
Zeige:

$$T : BC^0(\mathbb{R}^+, E^s \times E^u) \longrightarrow BC^0(\mathbb{R}^+, E^s \times E^u)$$

ist eine Kontraktion.
Behauptung: T bildet tatsächlich $BC^0(\mathbb{R}^+, E^s \times E^u)$ in sich ab:
x^s–Komponente:

$$\begin{aligned} &\sup_{t\geq 0}\left|e^{At}Px(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Pg(x(\tau))\,d\tau\right| \\ \leq\ &\sup_{t\geq 0} Ce^{-\delta t}|x_0| + \sup_{t\geq 0}\int_0^t Ce^{-\delta(t-\tau)}|g(x(\tau))|\,d\tau \\ \leq\ &C\|x\|_{BC^0} + \frac{C}{\delta}\operatorname{Lip}(g)\|x\|_{BC^0}. \end{aligned}$$

x^u–Komponente:

$$\begin{aligned}
& \sup_{t\geq 0}\left|-\int_t^\infty e^{A(t-\tau)}Qg(x(\tau))\,d\tau\right| \\
\leq\ & \sup_{t\geq 0}\int_0^t Ce^{\delta(t-\tau)}|g(x(\tau))|\,ds \\
\leq\ & \frac{C}{\delta}\mathrm{Lip}\,(g)\|x\|_{BC^0}.
\end{aligned}$$

Behauptung: T ist eine Kontraktion mit Kontraktionsrate $1/2$ unabhängig von x_0^s: Seien dazu $x_1 = (x_1^s, x_1^u), x_2 = (x_2^s, x_2^u) \in BC^0(\mathbb{R}^+, E^s \times E^u)$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\|PT(x_1^s,x_1^u) - PT(x_2^s,x_2^u)\|_{BC^0} &= \sup_{t\geq 0}\left|\int_0^t e^{A(t-\tau)}P(g(x_1(\tau)) - g(x_2(\tau))\,d\tau\right| \\
&\leq \sup_{t\geq 0}\int_0^t Ce^{-\delta(t-\tau)}\mathrm{Lip}\,(g)|x_1(\tau) - x_2(\tau)|\,d\tau \\
&\leq \frac{C}{\delta}\mathrm{Lip}\,(g)\|x_1 - x_2\|_{BC^0} \\
&\leq \frac{1}{4}\|x_1 - x_2\|_{BC^0}.
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\|QT(x_1^s,x_1^u) - QT(x_2^s,x_2^u)\|_{BC^0} &= \sup_{t\geq 0}\left|\int_t^\infty e^{A(t-\tau)}Q(g(x_1(\tau)) - g(x_2(\tau))\,d\tau\right| \\
&\leq \sup_{t\geq 0}\int_t^\infty Ce^{-\delta(t-\tau)}\mathrm{Lip}\,(g)|x_1(\tau) - x_2(\tau)|\,d\tau \\
&\leq \frac{C}{\delta}\mathrm{Lip}\,(g)\|x_1 - x_2\|_{BC^0} \\
&\leq \frac{1}{4}\|x_1 - x_2\|_{BC^0}.
\end{aligned}$$

Insgesamt ist dann

$$\|T(x_1)-T(x_2)\|_{BC^0} \leq \|PT(x_1)-PT(x_2)\|_{BC^0}+\|QT(x_1)-QT(x_2)\|_{BC^0} \leq \frac{1}{2}\|x_1-x_2\|_{BC^0}.$$

Aus dem Banachschen Fixpunktsatz folgt nun direkt, dass T einen Fixpunkt besitzt. Diesen Fixpunkt nennen wir $(x_*^s, x_*^u)(t, x_0^s)$. Aus der Konstruktion folgt sofort, dass $x_*^s(0, x_0^s) = x_0^s$. Nun können wir Ψ definieren als

$$\Psi(x_0^s) := x_*^u(0, x_0^s).$$

Ψ ist so glatt wie f, da der Fixpunkt beim Banachschen Fixpunktsatz so glatt von Parametern (hier x_0^s) abhängt wie die die Kontraktion T selbst. Beweise dazu finden sich beispielsweise in den Büchern von [Deimling] oder [Chow & Hale].
Graph (Ψ) ist positiv invariant, da der Fixpunkt eindeutig ist. Betrachte dazu einen Punkt $x_0 := (x_0^s, \Psi(x_0^s) \in$ Graph (Ψ) und eine Zeit $t_0 > 0$. Zerlege $\Phi_{t_0}(x_0) = (\tilde{x}^s, \tilde{x}^u)$. Dann bleibt

der Vorwärtsorbit von $(\tilde{x}^s, \tilde{x}^u)$ beschränkt. $\Psi(\tilde{x}^s)$ ist aber der *eindeutige* Punkt in E^u, so dass der Vorwärtsorbit durch $(\tilde{x}^s, \Psi(\tilde{x}^s))$ beschränkt bleibt. Also ist $\tilde{x}^u = \Psi(\tilde{x}^s)$, und damit $\Phi_{t_0}(x_0) \in \text{Graph}\ (\Psi)$.
Um zu zeigen, dass Lösungen in $W^s_{loc}(0)$ exponentiell schnell gegen 0 konvergieren, bedient man sich eines Tricks: Man definiert für $\eta > 0$

$$BC^0_\eta(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n) := \{x \in BC^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n);\ \|x\|_{BC^0_\eta} := \sup_{t \geq 0} e^{\eta t}|x(t)| < \infty\}$$

den Banachraum der stetigen Funktionen, die mindestens mit der Rate η exponentiell abfallen und zeigt, dass T eine Kontraktion auf $BC^0_\eta(\mathbb{R}^+, E^s \times E^u)$ ist, falls $\eta < \delta$. Das geht völlig analog zum obigen Beweis für $BC^0(\mathbb{R}^+, E^s \times E^u)$. In diesem Fall muss man nur alle Terme $e^{-\delta t}$ durch $e^{-(\delta-\eta)t}$ erstzen, etc. Eine Lösung in BC^0_η liefert dann automatisch ein exponentiell abklingendes $x^s(t)$. $\square$

Analog zeigt man die Existenz einer **lokalen instabilen Mannigfaltigkeit** $W^u_{loc}(0)$, die alle Lösungen enthält, die für $t \leq 0$ gegen $x = 0$ konvergieren.
Bemerkungen:
1. Man kann die Mannigfaltigkeiten $W^s_{loc}(0)$ und $W^u_{loc}(0)$ zu globalen **invarianten Mannigfaltigkeiten** fortsetzen durch den Fluss:

$$\begin{aligned} W^s(0) &= \bigcup_{t \leq 0} \Phi_t(W^s_{loc}(0)) \\ W^u(0) &= \bigcup_{t \geq 0} \Phi_t(W^u_{loc}(0)). \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} W^s(0) &= \{x_0 \in \mathbb{R}^n;\ \lim_{t\to\infty} \Phi_t(x_0) = 0\}, \\ W^u(0) &= \{x_0 \in \mathbb{R}^n;\ \lim_{t\to-\infty} \Phi_t(x_0) = 0\}. \end{aligned}$$

2. $W^s(0)$ ist tangential an den Eigenraum E^s. Um dies zu zeigen, kann man die Invarianz der lokalen stabilen Mannigfaltigkeit ausnutzen und eine Taylor-Entwicklung von Ψ erhalten. Auf diese Weise kann man Ψ auch näherungsweise bestimmen.
3. Auch wenn das Spektrum Eigenwerte auf der imaginären Achse besitzt, kann man eine ähnliche Konstruktion durchführen. Dann erhält man neben der stabilen und instabilen Mannigfaltigkeit noch eine **Zentrumsmannigfaltigkeit**, die (kleine) Lösungen enthält, die für alle $t \in \mathbb{R}$ beschränkt sind, also beispielsweise periodische Orbits nahe $x = 0$ ($\rightsquigarrow$ Kapitel 8).
4. Homokline Orbits, d.h. Trajektorien mit $\lim_{t\to\pm\infty} x(t) = 0$ liegen im Schnitt $W^s(0) \cap W^u(0)$. Generell trennen die invarianten Mannigfaltigkeiten oft Bereiche mit qualitativ unterschiedlichem Verhalten.
5. Stabile und instabile Mannigfaltigkeiten findet man auch für diskrete dynamische Systeme

$$x_{n+1} = F(x_n).$$

Der entsprechende Satz lautet:

Satz 6.5 (Lokale stabile Mannigfaltigkeit, diskret)
Sei $F : \mathbb{R}^m = X \to X$ ein C^1–Diffeomorphismus und $x = 0$ ein hyperbolischer Fixpunkt von F, d.h. $F(0) = 0$ und die Jacobi–Matrix $DF(0)$ habe keine Eigenwerte mit Betrag 1. Sei E^s der verallgemeinerte Eigenraum zu den Eigenwerten mit Betrag < 1 und E^u der verallgemeinerte Eigenraum zu den Eigenwerten mit Betrag > 1. Dann existiert eine positiv invariante lokale stabile Mannigfaltigkeit $W^s_{loc}(0)$, genauer:
Es existiert eine Umgebung U von $x = 0$ in E^s und eine Funktion $\Psi \in C^1(U, E^u)$, so dass

$$W^s_{loc}(0) := \operatorname{graph}(\Psi) = \{(x^s, x^u);\ x^u = \Psi(x^s)\}$$

die folgenden Eigenschaften besitzt:
(i) $W^s_{loc}(0)$ ist positiv invariant und es existieren Konstanten $K > 0$, $0 < \eta < 1$, so dass

$$|F^n(x_0)| \leq K\eta^n |x_0|$$

für $x_0 \in W^s_{loc}(0)$. (ii) Umgekehrt enthält $W^s_{loc}(0)$ alle Lösungen, die für alle positiven Zeiten $t \geq 0$ in einer kleinen Umgebung von $x = 0$ bleiben.

Auch diese lokale stabile Mannigfaltigkeit kann man natürlich zur globalen stabilen Mannigfaltigkeit

$$\begin{aligned} W^s(0) &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F^{-n}(W^s_{loc}(0)) \\ &= \{x_0 \in X;\ \lim_{n\to\infty} F^n(x_0) = 0\} \end{aligned}$$

fortsetzen. Analog existiert auch eine *instabile Mannigfaltigkeit*, die alle Punkte enthält, deren Rückwärtsorbit gegen $x = 0$ konvergiert.

Beispiel: Gedämpftes nichtlineares Pendel