

7 Smales Hufeisenabbildung und Hyperbolizität

Seit den 60-er Jahren hat man versucht, „typische“ Dynamische System zu beschreiben. Darunter versteht man solche Systeme, deren Verhalten sich bei kleinen Störungen qualitativ nicht ändert.

Definition: Sei X eine Mannigfaltigkeit. Eine Abbildung $F : X \rightarrow X$ heißt **strukturell stabil**, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass für alle Abbildungen $G : X \rightarrow X$ mit $\|F - G\|_{C^1} \leq \varepsilon$ die Abbildungen F und G zueinander C^0 -konjugiert sind.

Analog heißt ein Vektorfeld strukturell stabil, falls der zugehörige Fluss Φ^f topologisch konjugiert ist zu jedem Fluss Φ^g , solange $\|f - g\|_{C^1} \leq \varepsilon$.

Insbesondere müssen natürlich sämtliche invariante Mengen erhalten bleiben. Bisher kennen wir als invariante Mengen vor allem Ruhelagen und periodische Orbits. In diesem Kapitel werden wir die Smalesche Hufeisenabbildung kennenlernen, die eine wesentlich kompliziertere invariante Menge besitzt. Insbesondere ist die Dynamik auf dieser invarianten Menge topologisch transitiv und es besteht sensitive Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen. Unsere Grundanforderungen an „chaotisches“ Verhalten sind in diesem Fall also erfüllt.

Die Smalesche Hufeisenabbildung ist vielleicht *das* Paradebeispiel für robuste komplizierte Dynamik in höheren Raumdimensionen.

Im weiteren Verlauf der Vorlesung werden wir diesem Prototyp für „Chaos“ noch mindestens an zwei Stellen begegnen (\rightsquigarrow transversale homokline Punkte, \rightsquigarrow Shilnikov–Chaos).

7.1 Ein einfaches Modell: Das stückweise affine Hufeisen

Betrachte eine Abbildung $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, bei der das Quadrat $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ zunächst mit Hilfe der linearen Transformation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

gestreckt und gestaucht wird. Dieses lange Rechteck wird dann so abgebildet, dass es das ursprüngliche Quadrat Q in zwei Rechtecken schneidet.

Das linke „vertikale“ Rechteck V_1 ist das Bild des „horizontalen“ Rechtecks $H_1 := \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \frac{1}{3}\}$ unter der Transformation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

während das rechte „vertikale“ Rechteck V_2 das Bild des „horizontalen“ Rechtecks $H_2 := \{0 \leq x \leq 1, \frac{2}{3} \leq y \leq 1\}$ unter der Transformation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

ist. Insbesondere ist die Einschränkung $h|_{H_1 \cup H_2} : H_1 \cup H_2 \rightarrow V_1 \cup V_2$ invertierbar.

Die Menge $H_1 \cup H_2$ enthält also genau diejenigen Punkte, die unter h wieder nach Q abgebildet werden.

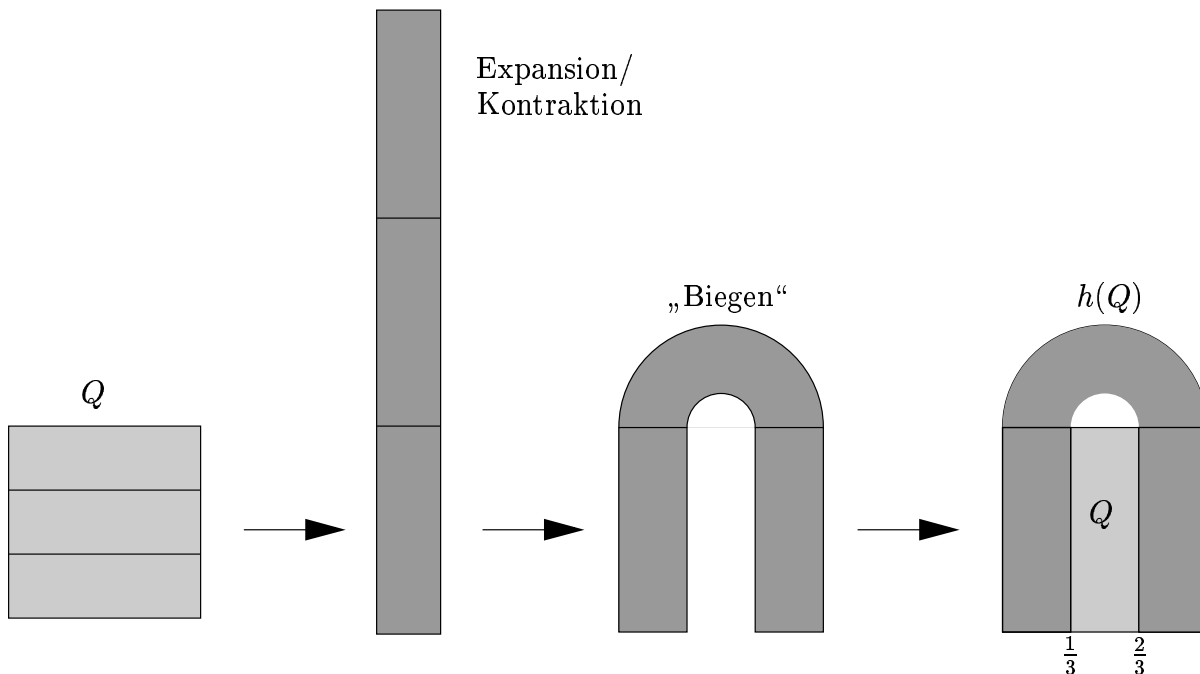


Abbildung 1: Smales Hufeisen: vereinfachte (lineare) Version

Hauptfrage: Welches ist die maximale (vorwärts und rückwärts) invariante Menge und wie ist die Dynamik von h auf dieser Menge ?

Um herauszufinden, welche Punkte unter h^2 wieder nach Q abgebildet werden, muss man die Menge $h(Q) \cap (H_1 \cup H_2)$ betrachten. Da $h(Q)$ aus den beiden Rechtecken V_1 und V_2 besteht, besteht $h(Q) \cap (H_1 \cup H_2)$ aus vier Zusammenhangskomponenten. Betrachten wir davon zunächst $V_1 \cap H_1$. Dieses kleine Rechteck wird unter h auf ein schmales vertikales Rechteck $V_{11} = \{0 \leq x \leq \frac{1}{9}, 0 \leq y \leq 1\}$ abgebildet. Das Urbild von $V_1 \cap H_1$ wiederum ist ein schmales horizontales Rechteck $H_{11} = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \frac{1}{9}\}$. Dieses Rechteck H_{11} enthält alle Punkte, deren erste und zweite Iterierte in das Rechteck V_1 fallen.

Ganz analog werden die kleinen Rechtecke $V_1 \cap H_2$, $V_2 \cap H_1$ und $V_2 \cap H_2$ auf vertikale Rechtecke V_{12} , V_{21} und V_{22} abgebildet. Die entsprechenden Urbilder $H_{i,j} := h^{-1}(V_i \cap H_j) = h^{-2}(V_{i,j})$ sind wiederum horizontale Rechtecke der Breite $1/9$. Dabei enthält $H_{i,j}$ genau diejenigen Punkte, deren erste Iterierte in V_i und deren zweite Iterierte in V_j liegen.

Die Punkte, deren drei erste Iterierte alle in Q liegen, müssen die Bedingung $h(x) \in H_{11} \cup H_{12} \cup H_{21} \cup H_{22}$ erfüllen, mit anderen Worten, sie müssen in einem der Schnitte $V_{s_1} \cap H_{s_2, s_3}$ liegen. Das Urbild eines solchen Rechtecks ist ein horizontales Rechteck H_{s_1, s_2, s_3} der Breite $1/27$, das alle Punkte x enthält mit $h^i(x) \in V_{s_i}$ für $i = 1, 2, 3$.

So kann man natürlich fortfahren und zu jeder endlichen Folge $(s_1, s_2, s_3, \dots, s_k)$ ein horizontales Rechteck

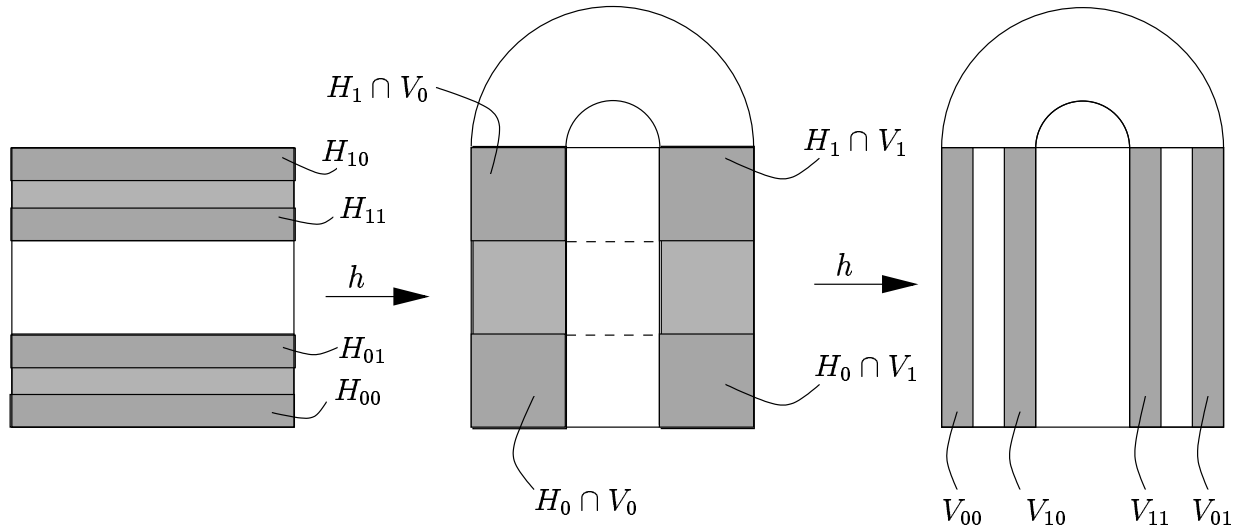
$$H_{s_1, s_2, \dots, s_k} = h^{-1}(V_{s_1} \cap H_{s_2, s_3, \dots, s_k})$$

der Breite 3^{-k} konstruieren. Aus der Konstruktion ergibt sich per Induktion sofort, dass

H_{s_1, s_2, \dots, s_k} genau diejenigen Punkte enthält, für die gilt:

$$h(x) \in V_{s_1}, h^2(x) \in V_{s_2}, \dots, h^k(x) \in V_{s_k},$$

die also vorwärts den selben Weg durch die Streifen V_1 und V_2 nehmen, jedenfalls bis zur k -ten Iterierten.



Dies erinnert schon sehr an die Konjugation der logistischen Abbildung $f_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$ mit $\lambda < 2 + \sqrt{5}$ zum einseitigen Shift auf Ω_2^+ aus Kapitel 3.

Diesmal haben wir jedoch eine Abbildung, die auf ihrer Bildmenge invertierbar ist. Das erlaubt uns eine invariante Menge zu finden, auf der h sogar topologisch konjugiert zum vollen Shift $\sigma : \Omega_2 \rightarrow \Omega_2$ ist. Das ist natürlich viel besser, denn der Shift auf Ω_2 ist ein diskretes dynamisches System, das wir gut kennen. Beispielsweise besitzt σ unendlich viele periodische Orbits, ist topologisch transitiv und zeigt sensitive Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen.

Es fehlt uns allerdings noch die „Kodierung“ des Rückwärtsorbits.

Dazu benutzen wir die vertikalen Rechtecke. Beispielsweise enthält $V_{12} = h(V_1 \cap H_2)$ diejenigen Punkte x mit $h^{-1}(x) \in H_2$ und $h^{-2}(x) \in H_1$, bzw. mit $x \in V_2$ und $h^{-1}(x) \in V_1$. Analog enthält $V_{i,j}$ die Punkte mit $x \in V_j$ und $h^{-1}(x) \in V_i$.

Jedes der Rechtecke $V_{i,j}$ schneidet die beiden horizontalen Rechtecke H_1 und H_2 und das Bild

$$V_{s_0, s_{-1}, s_{-2}} := h(V_{s_0, s_{-1}} \cap H_{s_2}) \subset V_{s_2}$$

ist ein vertikales Rechteck der Breite $1/27$. Dieses enthält natürlich alle Punkte mit $x \in V_{s_2}$, $h^{-1}(x) \in V_{s_1}$ und $h^{-2}(x) \in V_{s_0}$.

Wie oben kann man zu jeder endlichen Folge $(s_0, s_{-1}, \dots, s_{-k})$ ein vertikales Rechteck $V_{s_0, s_{-1}, \dots, s_{-k}}$ der Breite 3^{-k} konstruieren, so dass

$$V_{s_0, s_{-1}, \dots, s_{-k}} = h(V_{s_{-1}, s_{-2}, \dots, s_{-k}} \cap H_{s_0}) \subset V_{s_k}$$

und $V_{s_0, s_{-1}, \dots, s_{-k}}$ genau diejenigen Punkte enthält, für die gilt:

$$x \in V_{s_k}, h^{-1}(x) \in V_{s_{k-1}}, \dots, h^{-k}(x) \in V_{s_0},$$

die also rückwärts den selben Weg durch die Streifen V_1 und V_2 nehmen, jedenfalls bis zur k -ten Rückwärts-Iterierten.

Betrachtet man eine unendliche Folge verschachtelter vertikaler Rechtecke

$$V_{s_0} \supset V_{s_0, s_{-1}} \supset \dots \supset V_{s_0, s_{-1}, \dots, s_{-k}} \supset \dots$$

so besteht der Schnitt all dieser Rechtecke aus einer Linie $x = \text{const.}$, wobei die Konstante explizit berechnet werden kann. Auf dieser Linie liegen alle Punkte, deren Iterierte eine vorgegebene Rückwärtskodierung besitzen.

Die Konstruktion der Rechtecke $V_{s_0, s_{-1}, \dots, s_{-k}}$ entspricht genau der Konstruktion der klassischen Cantor-Menge \mathcal{C} durch sukzessives Herausnehmen von Intervallen. Daher ist die Menge der Punkte, deren Rückwärtsiterierte sämtlich in Q liegen gerade $\mathcal{C} \times [0, 1]$.

Analog erhält man als Schnitt von verschachtelten horizontalen Rechtecken

$$H_{s_1} \supset H_{s_1, s_2} \supset \dots \supset H_{s_1, s_2, \dots, s_k} \supset \dots$$

eine Linie $y = \text{const.}$, die lauter Punkte, mit der selben Vorwärtskodierung enthält. Durch den Schnitt einer horizontalen und einer vertikalen Linie ist also die Kodierung des gesamten Orbits festgelegt.

Daher können wir jeder beliebigen 1–2–Folge $(s_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ einen Punkt $x \in Q$ zuordnen vermöge

$$x(s) := \bigcap_{j=1}^{\infty} V_{s_{-j}, s_{-j+1}, \dots, s_{-1}, s_0} \cap \bigcap_{k=1}^{\infty} H_{s_1, s_2, \dots, s_k}.$$

Die gesamte (positiv und negativ) invariante Menge ist daher $\Lambda = \mathcal{C} \times \mathcal{C}$, eine zweidimensionale Cantormenge.

7.2 Smales Hufeisenabbildung

In diesem Kapitel geht es darum, eine recht universelle Konstruktion zu beschreiben, mit der man die Existenz einer invarianten Menge Λ nachweist, auf der eine Abbildung topologisch konjugiert zum Bernoulli–Shift auf n Symbolen ist. Diese Konstruktion ist eine nichtlineare Version der einfacheren Überlegungen aus dem vorigen Abschnitt.

Als Referenz ist zu diesem Abschnitt das Buch *Stable and random motions in dynamical systems. With special emphasis on celestial mechanics.* von J. Moser (Princeton University Press 1973, Neuauflage 2001) zu empfehlen.

Definition: Sei $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ und $0 < \mu < 1$. Dann heißt eine Kurve $y = h(x)$ **μ -horizontale Kurve**, falls $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ eine Abbildung mit Lipschitz-Konstante μ ist. Analog bezeichnen wir eine Kurve $x = v(y)$ als **μ -vertikale Kurve**, falls die Abbildung $v : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ Lipschitz-Konstante $\leq \mu$ hat.

Definition: Eine Menge

$$H := \{(x, y); 0 \leq x \leq 1, h_1(x) \leq y \leq h_2(x)\}$$

heißt **μ -horizontaler Streifen**, falls $y = h_1(x)$ und $y = h_2(x)$ μ -horizontale Kurven sind mit $h_1(x) < h_2(x)$.

Der **Durchmesser** eines horizontaler Streifens ist $d(H) := \sup_{x \in [0,1]} |h_1(x) - h_2(x)|$.

Analog heißt eine Menge

$$V := \{(x, y); v_1(y) \leq x \leq v_2(y), 0 \leq x \leq 1\}$$

μ -**vertikaler Streifen** mit Durchmesser $d(V) := \sup_{y \in [0,1]} |v_1(x) - v_2(x)|$, falls $x = v_1(y)$ und $x = v_2(y)$ μ -vertikale Kurven sind mit $v_1(y) < v_2(y)$.

Satz 7.1 (Smales Hufeisen)

Seien $H_1, H_2, \dots, H_n \subset Q$ disjunkte μ -horizontale Streifen und $V_1, V_2, \dots, V_n \subset Q$ disjunkte μ -vertikale Streifen. Die Abbildung

$$f : \bigcup_{i=1}^n H_i \rightarrow \bigcup_{i=1}^n V_i$$

sei ein Diffeomorphismus und es gelte für ein $0 < \nu < 1$:

- **Invarianz**

Für jedes $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ bildet f den horizontalen Streifen H_i so auf den vertikalen Streifen V_i ab, dass horizontale Ränder auf horizontale Ränder und vertikale Ränder auf vertikale Ränder abgebildet werden.

- **vertikale Expansion**

Für einen beliebigen μ -horizontalen Streifen $H \subset \cup_j H_j$ und ein beliebiges $1 \leq i \leq n$ ist $H_i \cap f^{-1}(H)$ ein μ -horizontaler Streifen der Breite $d(H_i \cap f^{-1}(H)) \leq \nu d(H)$.

- **horizontale Kontraktion**

Für einen beliebigen μ -vertikalen Streifen $V \subset \cup_j V_j$ und ein beliebiges $1 \leq i \leq n$ ist $f(V) \cap V_i$ ein μ -vertikaler Streifen der Breite $d(f(V) \cap V_i) \leq \nu d(V)$.

Dann ist die Menge

$$\Lambda = \bigcap_{k=-\infty}^{+\infty} f^k \left(\bigcup_{j=1}^n V_j \right) = \bigcap_{k=-\infty}^{+\infty} f^k \left(\bigcup_{j=1}^n H_j \right)$$

eine invariante Cantormenge. Die Einschränkung $f|_{\Lambda}$ ist topologisch konjugiert zum Bernoulli-Shift σ auf dem Folgenraum Ω_n :

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ \Lambda & \longrightarrow & \Lambda \\ \Psi \downarrow & & \downarrow \Psi \\ \Omega_n & \longrightarrow & \Omega_n \\ & \sigma & \end{array}$$

Mit dem, was wir über die Shift-Abbildung bereits wissen, ergeben sich sofort einige interessante Konsequenzen:

Korollar 7.2 Falls die Abbildung f die Voraussetzungen des vorigen Satzes erfüllt, dann

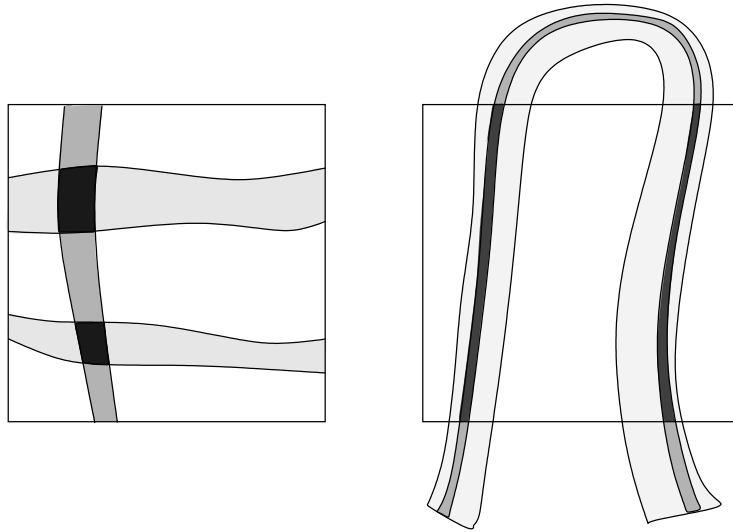


Abbildung 2: Streifen im Smaleschen Hufeisen

- (i) besitzt f unendlich viele periodische Orbits mit beliebig langer Periode und diese periodischen Orbits liegen dicht in Λ ,
- (ii) besitzt f unendlich viele Orbits, die homoklin bzw. heteroklin zu periodischen Orbits sind,
- (iii) besitzt f mindestens einen in Λ dichten Orbit,
- (iv) zeigt f sensitive Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen.

Wir beginnen mit einigen vorbereitenden Lemmata.

Lemma 7.3 Eine Folge von ineinander verschachtelten μ -horizontalen Streifen

$$H^{(1)} \supset H^{(2)} \supset H^{(3)} \supset \dots,$$

deren Breite $d(H^{(n)})$ gegen 0 konvergiert, hat als Schnitt $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} H^{(n)}$ eine μ -horizontale Kurve. Eine analoge Aussage gilt für μ -vertikale verschachtelte Streifen.

Beweis: Sei $H^{(n)} = \{h_1^{(n)}(x) \leq h_2^{(n)}(x)\}$. Die Funktionenfamilie $(h_1^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt und gleichgradig stetig (da Lipschitz), nach dem Satz von Arzela–Ascoli existiert also eine konvergente Teilfolge $(h_1^{(n_k)})_{k \in \mathbb{N}}$, die gegen eine Lipschitz-stetige Funktion h_1 konvergiert. Aus der Monotonie folgt, dass sogar die gesamte Folge $(h_1^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ gegen h_1 konvergiert. Analog konvergiert die Folge $(h_2^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ gegen eine Lipschitz-stetige Funktion h_2 . Wegen $d(H^{(n)}) \rightarrow 0$ muss $h_1 = h_2$ sein. \square

Lemma 7.4 Sei wieder $0 < \mu < 1$.

- (i) Dann schneidet eine beliebige μ -horizontale Kurve $y = h(x)$ eine beliebige μ -vertikale Kurve $x = v(y)$ in genau einem Punkt.

(ii) Sei (x_1, y_1) der Schnittpunkt der μ -horizontalen Kurve $y = h_1(x)$ und der μ -vertikalen Kurve $x = v_1(y)$ und analog (x_2, y_2) der Schnittpunkt von $y = h_2(x)$ mit $x = v_2(y)$. Dann ist

$$|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \leq \frac{1}{1 - \mu} \left(\sup_{y \in [0,1]} |v_1(y) - v_2(y)| + \sup_{x \in [0,1]} |h_1(x) - h_2(x)| \right).$$

Beweis: (i) Falls (x, y) auf beiden Kurven liegt, dann ist $x = v(y) = v(h(x))$, also ist x Fixpunkt von $v \circ h$. Offensichtlich bildet $v \circ h$ das Intervall $[0, 1]$ in sich ab. Es gilt

$$|v(h(x_1)) - v(h(x_2))| \leq \mu |h(x_1) - h(x_2)| \leq \mu^2 |x_1 - x_2|,$$

also ist die Abbildung $v \circ h$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $\mu^2 < 1$ und besitzt nach dem Banachschen Fixpunktsatz einen eindeutigen Fixpunkt.

(ii) Es gilt einerseits

$$\begin{aligned} |x_2 - x_1| &= |v_2(y_2) - v_1(y_1)| \\ &\leq |v_2(y_2) - v_2(y_1)| + |v_2(y_1) - v_1(y_1)| \\ &\leq \mu |y_2 - y_1| + \sup_{y \in [0,1]} |v_1(y) - v_2(y)| \end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned} |y_2 - y_1| &= |h_2(x_2) - h_1(x_1)| \\ &\leq |h_2(x_2) - h_2(x_1)| + |h_2(x_1) - h_1(x_1)| \\ &\leq \mu |x_2 - x_1| + \sup_{x \in [0,1]} |h_1(x) - h_2(x)| \end{aligned}$$

Durch Addition der beiden Ungleichungen folgt sofort die Behauptung. \square

Beweis von Satz 7.1: Der Homöomorphismus $\Psi : \Lambda \rightarrow \Omega_n$ ergibt sich auf ganz natürliche Weise: Ψ ordnet jedem Punkt aus Λ seinen „kodierte Weg“ durch die Streifen V_i bzw. H_i zu. Dabei genügt es, entweder die horizontalen oder die vertikalen Streifen zu betrachten, da ja H_i auf V_i abgebildet wird.

Wir benutzen die vertikalen Streifen V_i und setzen $\Psi(x) := (s_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ mit

$$s_k = i \quad \text{falls } f^k(x) \in V_i$$

für $x \in \Lambda$.

Ψ ist injektiv:

Es ist zu zeigen, dass es zu jeder Kodierung genau einen Startwert x gibt.

Induktiv definieren wir μ -horizontale Streifen

$$H_{s_1, s_2, \dots, s_k} := f^{-1}(H_{s_2, s_3, \dots, s_k}) \cap H_{s_1}$$

Wegen Bedingung (**vertikale Expansion**) ist dies tatsächlich ein μ -horizontaler Streifen der Breite

$$d(H_{s_1, s_2, \dots, s_k}) \leq \nu d(H_{s_2, s_3, \dots, s_k}).$$

Per Induktion ergibt sich dann

$$d(H_{s_1, s_2, \dots, s_k}) \leq \nu d(H_{s_2, s_3, \dots, s_k}) \leq \nu^2 d(H_{s_3, s_4, \dots, s_k}) \dots \leq \nu^{k-1} d(H_{s_k}) \leq \nu^{k-1}.$$

Induktiv zeigt man:

$$x \in H_{s_1, s_2, \dots, s_k} \iff f^i(x) \in V_{s_i} \text{ für } i = 1, \dots, k$$

Das ist klar für $k = 1$. Ansonsten argumentieren wir wie beim vereinfachten Hufeisen: Falls die Behauptung für H_{s_2, s_3, \dots, s_k} bereits gezeigt ist, dann folgt für $x \in H_{s_1, s_2, \dots, s_k}$ direkt aus der Definition, dass $h(x) \in V_{s_1}$ und $h(x) \in H_{s_2, s_3, \dots, s_k}$, also $h^i(x) \in V_{s_i}$ für $i = 2, 3, \dots, k$. Für eine gegebene Folge (s_1, s_2, \dots) ist dann der Durchschnitt

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} H_{s_1, s_2, \dots, s_k} =: h(s_1, s_2, \dots)$$

nach Lemma 7.3 eine μ -horizontale Kurve.

Analog definiert man auch μ -vertikale Streifen

$$V_{s_0, s_{-1}, \dots, s_{-k}} := V_{s_0} \cap f(V_{s_{-1}, s_{-2}, \dots, s_{-k}}).$$

Für diese Streifen gilt wegen Bedingung (**horizontale Kontraktion**)

$$d(V_{s_0, s_{-1}, \dots, s_{-k}}) \leq \nu d(V_{s_{-1}, s_{-2}, \dots, s_{-k}}) \leq \dots \leq \nu^k.$$

Der Streifen $V_{s_0, s_{-1}, \dots, s_{-k}}$ enthält alle Punkte x mit $x \in V_{s_0}$, $f^{-1}(x) \in V_{s_{-1}}, \dots, f^{-k}(x) \in V_{s_{-k}}$.

Auch hier ist der Durchschnitt

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} V_{s_0, s_{-1}, \dots, s_{-k}} =: v(s_0, s_{-1}, s_{-2}, \dots)$$

wieder eine vertikale Kurve, auf der die Punkte x liegen mit $x \in V_{s_0}$ und $f^{-i}(x) \in V_{s_{-i}}$ für alle $i \geq 1$.

Für eine gegebene Folge $s = (\dots, s_{-2}, s_{-1}, s_0, s_1, \dots) \in \Omega_n$ schneiden sich die μ -horizontale Kurve $h(s_1, s_2, \dots)$ und die μ -vertikale Kurve $v(s_0, s_{-1}, s_{-2}, \dots)$ in genau einem Punkt $\Psi^{-1}(s)$.

Ψ konjugiert f und σ :

Dies folgt direkt aus der Konstruktion:

$$s = \Psi(x) \iff f^k(x) \in V_{s_k} \iff f^{k-1}(f(x)) \in V_{s_k} \iff f^{k-1}(f(x)) \in V_{\sigma(s)_{k-1}}.$$

Also ist $\Psi(f(x)) = \sigma(\Psi(x))$.

Λ ist eine Cantormenge:

In den Übungen wurde bereits gezeigt, dass Ω_n eine Cantormenge (also überabzählbar, kompakt, perfekt und total unzusammenhängend) ist. Alle diese Eigenschaften bleiben unter dem Homöomorphismus Ψ erhalten.

Ψ^{-1} ist stetig:

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Aus Kapitel 3 wissen wir, dass dann ein $k \in \mathbb{N}$ existiert, so dass zwei Folgen $s, \tilde{s} \in \Omega_n$ mit $d_2(s, \tilde{s}) < \varepsilon$ auf einem Abschnitt der Länge $2k + 1$ übereinstimmen müssen:

$$s_i = \tilde{s}_i \quad \text{für } i = -k, \dots, k.$$

Insbesondere sind dann $\Psi^{-1}(s)$ und $\Psi^{-1}(\tilde{s})$ beide in $H_{s_1, \dots, s_k} \cap V_{s_0, s_{-1}, \dots, s_{-k}}$ enthalten. Für die Durchmesser dieser Streifen hatten wir bereits die Abschätzungen $d(H_{s_1, \dots, s_k}) \leq \nu^{k-1}$ und $d(V_{s_0, s_{-1}, \dots, s_{-k}}) \leq \nu^k$ hergeleitet. Nach Lemma 7.4 ist daher

$$|\Psi^{-1}(s) - \Psi^{-1}(\tilde{s})| \leq \frac{1}{1 - \mu} (\nu^{k-1} + \nu^k) \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

 Ψ ist stetig:

\leadsto Übungsaufgabe □

7.3 Beispiel: Bouncing ball (siehe Guckenheimer & Holmes, S.102–116 u. 242–245)

Modell: Ein Ball hüpft auf einer Tischplatte, die sich sinusförmig auf und ab bewegt. Dabei wird bei einem Aufprall des Balles mit der Geschwindigkeit v_{Ball}^{alt} die neue Geschwindigkeit v_{Ball}^{neu} berechnet als

$$v_{Ball}^{neu} - v_{Tisch} = -\alpha (v_{Ball}^{alt} - v_{Tisch})$$

mit einem Faktor $\alpha \in (0, 1]$. Vernachlässigt man den Luftwiderstand und die Tatsache, dass der Ball den Tisch jeweils in unterschiedlicher Position trifft, dann kann man leicht die Zeit bis zum nächsten Aufprall berechnen. Außerdem ist dann die Geschwindigkeit des Balls beim n -ten Auftreffen mit der Tischplatte betragsmäßig gleich der Geschwindigkeit nach dem $(n - 1)$ -ten Kontakt.

Diese Reduktion führt auf die Gleichung

$$f_{\alpha, \gamma} : \quad \begin{cases} \phi_{j+1} = v_j + \phi_j \\ v_{j+1} = \alpha v_j - \gamma \cos(\phi_j + v_j) \end{cases}$$

für die Phase ϕ_n des Tisches und die Geschwindigkeit v_n des Balls beim n -ten Auftreffen. Beachte, dass $\det Df_{\alpha, \gamma} = \alpha$, der Parameter α gibt also an, wie sich Volumina im Phasenraum unter Iteration verändern, d.h. Flächeninhalte in der (ϕ, v) -Ebene werden um den Faktor α kleiner. Im Fall $\alpha = 1$ ist $f_{\alpha, \gamma}$ eine flächenerhaltende Abbildung.

Unser Ziel: Finde ein Smalesches Hufeisen für $\alpha = 0.5$ und $\gamma = 12$ (oder noch größer).

Für ein Hufeisen mit $\alpha = 1$, siehe Guckenheimer & Holmes, S.242–245.

Wir wollen uns zunächst horizontale und vertikale Streifen beschaffen.

Führe noch eine Koordinaten–Transformation durch:

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{\phi}{2\pi} \\ y = \frac{\phi + v}{2\pi} \end{array} \right\} \iff \begin{cases} \phi = 2\pi x \\ v = 2\pi(y - x) \end{cases}$$

In diesen Koordinaten lautet die Abbildung

$$F_{\alpha,\gamma} : \begin{cases} x_{j+1} = y_j \\ y_{j+1} = (1 + \alpha) y_j - \alpha x_j - \frac{\gamma}{2\pi} \cos(2\pi y_j) \end{cases}$$

Dabei ist $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ nun 1-periodisch. Die Umkehrabbildung lässt sich wieder von Hand ausrechnen:

$$F_{\alpha,\gamma}^{-1} : \begin{cases} x_j = \frac{1 + \alpha}{\alpha} x_{j+1} - \frac{\gamma}{2\pi\alpha} \cos(2\pi x_{j+1}) - \frac{1}{\alpha} y_{j+1} \\ y_j = x_{j+1} \end{cases}$$

Wir wollen nun wieder das Bild des Quadrats $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ untersuchen. $F_{\alpha,\gamma}$ bildet

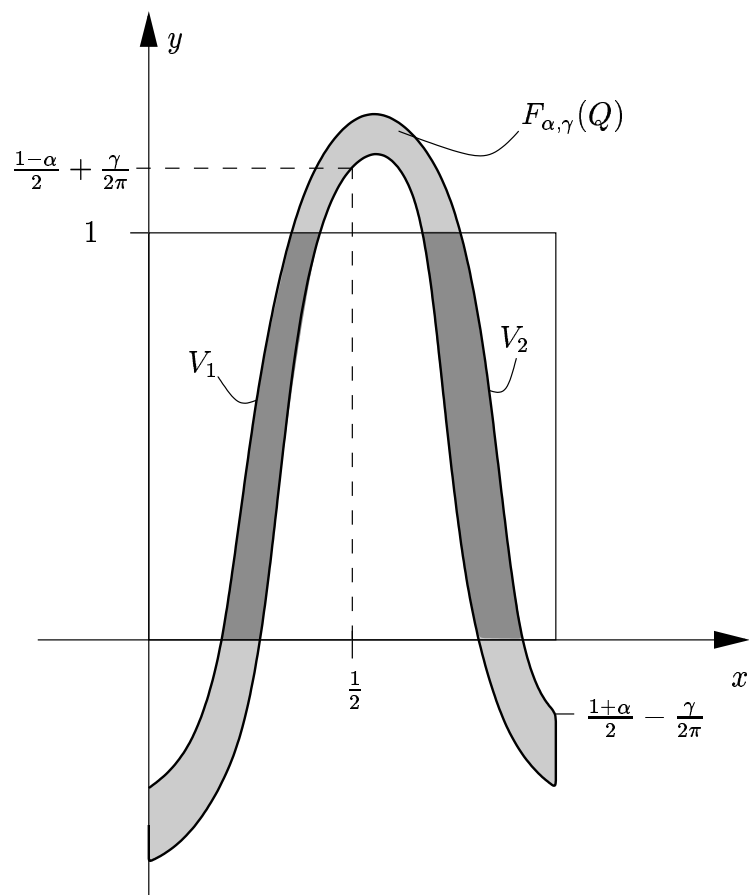


Abbildung 3: Das Hufeisen in der „bouncing ball“-Abbildung

Linien $x_j = const.$ ab auf Kurven

$$y(x) = (1 + \alpha) x - \alpha x_j - \frac{\gamma}{2\pi} \cos(2\pi x)$$

Dabei liegt die Kurve mit $x_j = 1$ zuunterst, während die Kurve mit $x_j = 0$ den oberen Rand von $F_{\alpha,\gamma}(Q)$ bildet.

Die folgenden notwendigen Bedingungen bewirken, dass $F_{\alpha,\gamma}(Q) \cap Q$ aus zwei vertikalen Segmenten besteht:

1. Die Kurve $F_{\alpha,\gamma}(x_j \equiv 1)$ muss die Linie $y = 1$ in zwei verschiedenen Punkten schneiden. Dies ist sicher gewährleistet, falls

$$(1 + \alpha)\frac{1}{2} - \alpha + \frac{\gamma}{2\pi} > 1 \iff \gamma > \frac{3}{2}\pi \quad (\text{für } \alpha = 0.5).$$

2. Die Kurve $F_{\alpha,\gamma}(x_j \equiv 0)$ muss die Linie $x = 1$ in einem Punkt mit negativer y -Koordinate schneiden. Dies ist sicher gewährleistet, falls

$$(1 + \alpha)\frac{1}{2} - \frac{\gamma}{2\pi} < 0 \iff \gamma > 3\pi \quad (\text{für } \alpha = 0.5).$$

Wir wählen daher für unsere Rechnungen $\gamma = 12 > 3\pi$, um noch etwas Spielraum zu haben.

Als vertikale Streifen V_1 und V_2 nehmen wir die beiden Zusammenhangskomponenten von $F_{\alpha,\gamma}(Q) \cap Q$.

Mit etwas Unterstützung durch einen Taschenrechner oder PC kann man die Lage dieser vertikalen Streifen wie folgt eingrenzen:

$$V_1 \subset \{(x, y); 0.22 \leq x \leq 0.34, 0 \leq y \leq 1\}, \quad V_2 \subset \{(x, y); 0.71 \leq x \leq 0.87, 0 \leq y \leq 1\}$$

Insbesondere ergibt sich dann für die Steigung der Ränder die Abschätzung

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x_j - \frac{6}{\pi} \cos(2\pi x) \right) = \frac{3}{2} + 12 \sin(2\pi x) \in [11.6, 13.3] \quad \text{für } x \in [0.22, 0.34]$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x_j - \frac{6}{\pi} \cos(2\pi x) \right) = \frac{3}{2} + 12 \sin(2\pi x) \in [-10.2, -7.2] \quad \text{für } x \in [0.71, 0.87]$$

Ganz grob abgeschätzt ist also $\left| \frac{dy}{dx} \right| > 5$. Es handelt sich daher tatsächlich um μ -vertikale Streifen, beispielsweise für $\mu = 0.2$.

Die zugehörigen horizontalen Streifen H_1 und H_2 sind dann die Urbilder von V_1 und V_2 . Dass es sich dabei tatsächlich um μ -horizontale Streifen handelt, zeigen wir hier nicht im Detail. Man benutzt dazu die Umkehrabbildung $F_{\alpha,\gamma}^{-1}$ und untersucht für den Streifen H_1 beispielsweise das Urbild der beiden Linien $\{(x, y); 0.22 \leq x \leq 0.34, y = 0\}$ und $\{(x, y); 0.22 \leq x \leq 0.34, y = 1\}$.

Das Urbild der Linie $\{(x, y); 0.22 \leq x \leq 0.34, y = 0\}$ erstreckt sich von $x = 0.66 - \frac{12}{\pi} \cos(0.44\pi) \approx -0.0557$ bis $x = 1.02 - \frac{12}{\pi} \cos(0.68\pi) \approx 3.0667$. Es lässt sich schreiben als $x = w(y) = 3y - \frac{12}{\pi} \cos(2\pi y)$. Dann ist für $0.22 \leq y \leq 0.34$

$$w'(y) = 3 + 24 \sin(2\pi y) \in [23.26387, 26.57489]$$

Damit existiert natürlich eine Umkehrfunktion $y = w^{-1}(x)$ für $x \in [0, 1]$ mit $|(w^{-1})'(x)| \leq 23.263^{-1} < 0.2$.

Die selben Argumente gelten auch für das Urbild der Linie $\{(x, y); 0.22 \leq x \leq 0.34, y = 1\}$. Auch hier geht also beispielsweise die Wahl $\mu = 0.2$.

Genauso geht man auch bei den anderen μ -horizontalen Linien vor.

Was nun noch fehlt, ist die Verifikation der Bedingungen (**vertikale Expansion**) und (**horizontale Kontraktion**). Das verschieben wir auf später, wenn wir gelernt haben, wie man diese beiden Bedingungen durch leichter nachprüfbarere Bedingungen ersetzt.

7.4 C^1 -Hufeisen und hyperbolische Struktur

Hauptproblem bei der Anwendung des Hufeisen-Satzes: Bedingungen (**vertikale Expansion**) und (**horizontale Kontraktion**) müssen im Prinzip für beliebige Streifen überprüft werden.

Jetzt: Methode, die für *differenzierbare* Abbildungen $f = (f_1, f_2)$ das Nachprüfen dieser Bedingungen erleichtert.

Die Linearisierung

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \mapsto Df(x, y) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

bildet Vektoren $(\xi, \eta)^T \in \mathbb{R}^2$ ab. Da Lipschitz-Kurven fast überall (im Lebesgueschen Sinne) differenzierbar sind, kann man sich ohne große Einschränkung darunter Tangentialvektoren an horizontale bzw. vertikale Kurven vorstellen.

Satz 7.5 (Smalesches Hufeisen, C^1)

Sei $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine differenzierbare Abbildung und wie im Hufeisen-Satz seien H_i und V_i horizontale bzw. vertikale Streifen, die die Bedingung (**Invarianz**) erfüllen.

Es gelte weiter für ein $0 < \mu < \frac{1}{2}$ und $(x, y) \in (\cup_i H_i) \cap (\cup_i V_i)$:

- (**C^1 -Expansion**)

$Df^{-1}(x, y)$ bildet den stabilen Kegel

$$K^s := \{(\xi, \eta); |\eta| < \mu|\xi|\}$$

in sich ab (d.h. $Df^{-1}(K^s) \subset K^s$) und es gilt

$$|\xi_0| \leq \mu |\xi_{-1}| \quad \text{für} \quad (\xi_{-1}, \eta_{-1}) := Df^{-1}(\xi_0, \eta_0).$$

- (**C^1 -Kontraktion**)

$Df(x, y)$ bildet den instabilen Kegel

$$K^u := \{(\xi, \eta); |\xi| < \mu|\eta|\}$$

in sich ab (d.h. $Df(K^u) \subset K^u$) und es gilt

$$|\xi_0| \leq \mu |\xi_1| \quad \text{für} \quad (\xi_1, \eta_1) := Df(\xi_0, \eta_0).$$

Dann gelten die Bedingungen (**vertikale Expansion**) und (**horizontale Kontraktion**) aus dem Hufeisensatz 7.1 mit $\nu = \frac{\mu}{1-\mu} < 1$.

Bemerkung: Zwei Unterschiede zum ursprünglichen Hufeisen-Satz:

1. Wir brauchen hier $\mu < \frac{1}{2}$ statt $\mu < 1$.
2. Wir müssen die Bedingung nur auf dem Durchschnitt der horizontalen und der vertikalen Streifen überprüfen. Das hätten wir auch im Satz 7.1 schon so machen können, da alle anderen Punkte unter f oder f^{-1} nicht mehr nach Q zurück abgebildet werden und daher ohnehin nicht von Interesse sind. In der Praxis nützt diese Einschränkung aber oft eine ganze Menge, wie wir später auch sehen werden.

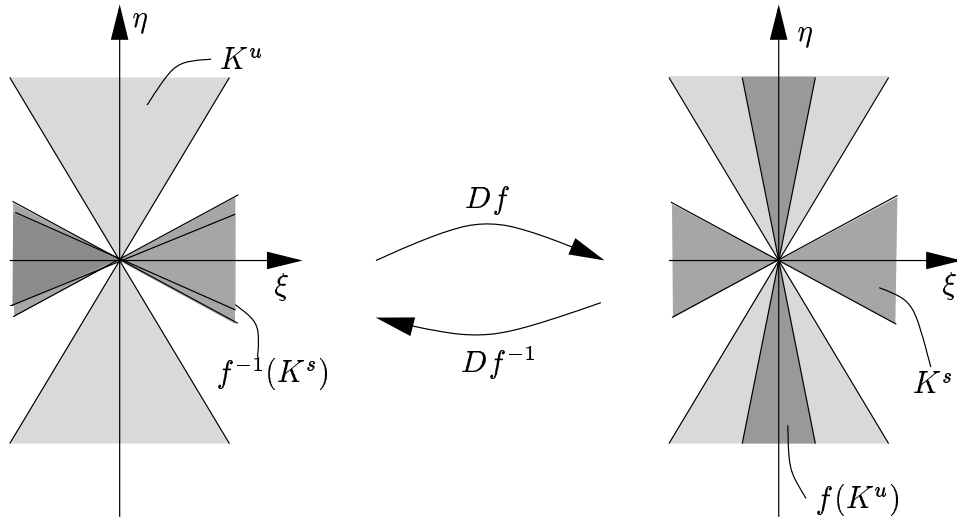


Abbildung 4: Kegelbedingung

Beweis: Wir betrachten einen μ -vertikale Streifen $V \subseteq \cup_j V_j$ und zeigen, dass für ein beliebiges $1 \leq i \leq n$ gilt:

- (i) die Menge $f(V) \cap V_i$ ist ein μ -vertikaler Streifen,
- (ii) für den Durchmesser gilt: $d(f(V) \cap V_i) \leq \nu d(V)$.

Der Beweis für μ -horizontale Streifen verläuft ganz analog.

Sei also V ein μ -vertikaler Streifen, der von den μ -vertikalen Kurven $x = v_1(y)$ und $x = v_2(y)$ begrenzt wird.

Seien weiter $y = h_1(x)$ und $y = h_2(x)$ die Randkurven des horizontalen Streifens H_i . Wie wir gezeigt haben, schneidet die vertikale Kurve $x = v_1(y)$ diese beiden horizontalen Randkurven in jeweils einem Punkt. Sei $v_1 \cap H_i$ der Abschnitt der vertikalen Kurve v_1 , der zwischen diesen Punkten liegt.

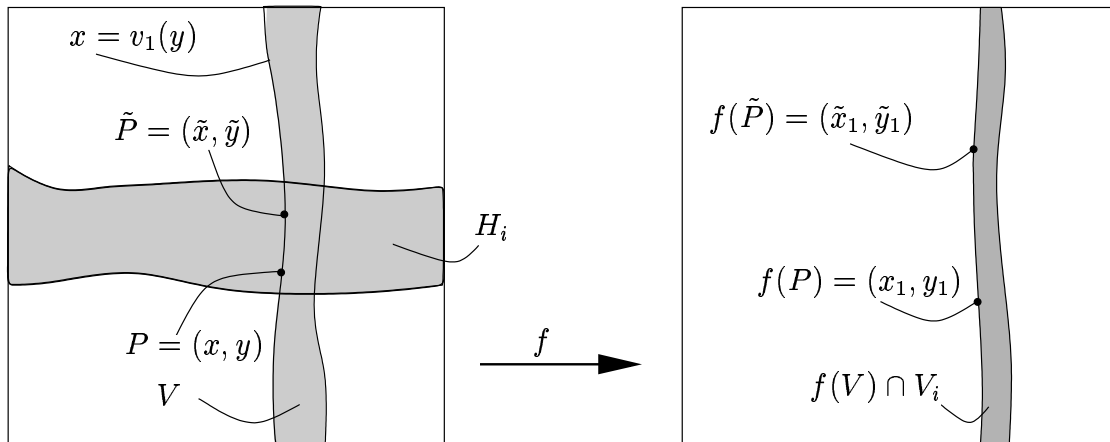
Wegen Bedingung (**Invarianz**) werden diese beiden Punkte auf den oberen bzw. unteren Rand von V_i abgebildet. Wir müssen nun zeigen, dass $f(v_1 \cap H_i)$ eine μ -vertikale Kurve ist. Da ein analoger Beweis auch für $v_2 \cap H_i$ funktioniert, ist damit (i) bewiesen.

Wir betrachten zwei beliebige Punkte $P = (x, y)$ und $\tilde{P} = (\tilde{x}, \tilde{y})$ auf der Kurve $v_1 \cap H_i$. Da v_1 eine μ -vertikale Kurve ist, gilt

$$|v_1(y) - v_1(\tilde{y})| \leq \mu |y - \tilde{y}|$$

Insbesondere liegt dann der Vektor $P - \tilde{P}$ im Kegel K^u . Für die Bilder $(x_1, y_1) := f(P)$ und $(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1) := f(\tilde{P})$ gilt nun

$$\begin{aligned} |x_1 - \tilde{x}_1| &= \left| \Pi_x \left(f(P) - f(\tilde{P}) \right) \right| \\ &= \left| \Pi_x \int_0^1 \underbrace{Df(\tilde{P} + \theta(P - \tilde{P}))}_{\in \text{conv} H_i} \cdot \underbrace{(P - \tilde{P})}_{\in K^u} d\theta \right| \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &\leq \mu \left| \Pi_y \int_0^1 Df(\tilde{P} + \theta(P - \tilde{P})) \cdot (\tilde{P} - P) d\theta \right| \\ &\leq \mu |y_1 - \tilde{y}_1| \end{aligned}$$

Genauso zeigt man natürlich, dass auch das Bild $f(v_2 \cap H_i)$ eine μ -vertikale Kurve ist. Damit ist Teil (i) bewiesen: $f(V) \cap V_i$ ist tatsächlich ein μ -vertikaler Streifen.

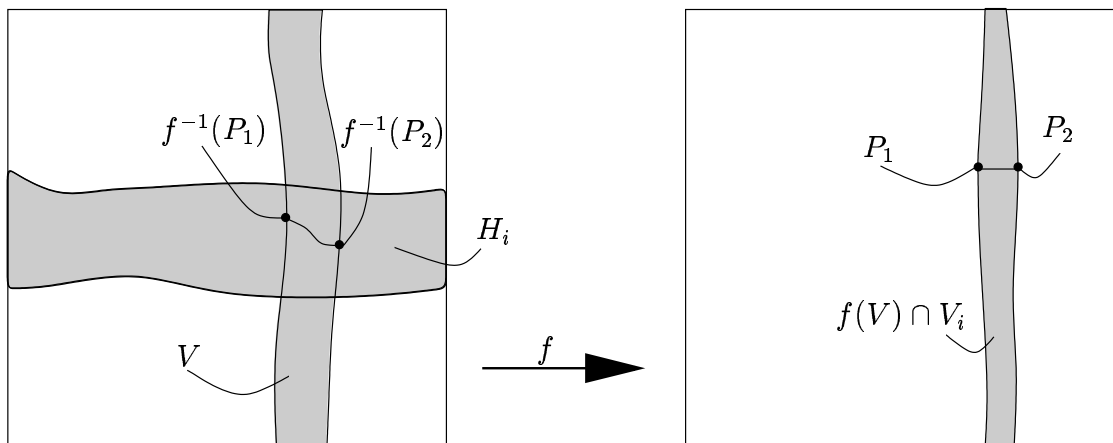
Um Teil (ii) zu beweisen, wählen wir zwei Punkte P_1 und P_2 auf dem linken und rechten Rand des Streifens $f(V) \cap V_i$ mit derselben y -Koordinate und so, dass $d(f(V) \cap V_i) = |P_1 - P_2|$. Die Strecke zwischen P_1 und P_2 parametrisieren als

$$p(s) := (1 - s)P_1 + sP_2, \quad 0 \leq s \leq 1$$

Es gilt natürlich $\dot{p}(s) \in K^s$, da \dot{p} horizontal ist. Für das Urbild $q(s) := f^{-1}(p(s))$ gilt dann

$$\dot{q}(s) = Df^{-1}(\underbrace{p(s)}_{\in V_i}) \underbrace{\dot{p}(s)}_{\in K^s} \in K^s$$

wegen der Invarianz des Kegels K^s unter Df^{-1} .



Daher definiert $q(t)$ eine μ -horizontale Kurve, deren Endpunkte $q(0)$ und $q(1)$ auf dem linken bzw. rechten Rand von V liegen. Nach Lemma 2 (ii) gilt dann für den Abstand

$$|q(1) - q(0)| \leq \frac{1}{1 - \mu} \underbrace{\sup_y |v_1(y) - v_2(y)|}_{\leq d(V)} \leq \frac{1}{1 - \mu} d(V).$$

Andererseits gilt wegen (**C^1 -Expansion**) für die x -Komponenten $\Pi_x \dot{p}$ und $\Pi_x \dot{q}$ die Ungleichung

$$\Pi_x \dot{p}(s) \leq \mu \Pi_x \dot{q}(s)$$

und daher

$$d(f(V) \cap V_i) = \int_0^1 |\Pi_x \dot{p}(s)| ds \leq \mu \int_0^1 |\Pi_x \dot{q}(s)| ds \leq \mu |q(1) - q(0)| \leq \frac{\mu}{1 - \mu} d(V)$$

□

Bemerkung: Die Bedingungen (**Invarianz**), (**C^1 -Expansion**) und (**C^1 -Kontraktion**) sind *robust* in dem folgenden Sinne: Falls wir die Abbildung leicht stören, d.h. wir ersetzen f durch \tilde{f} mit $\|f - \tilde{f}\|_{C^1}$ hinreichend klein, dann sind auch für \tilde{f} alle Voraussetzungen erfüllt und \tilde{f} besitzt ebenfalls ein Hufeisen.

7.4.1 Hufeisen im „bouncing ball“, Fortsetzung

Mit den Bedingungen (**C^1 -Expansion**) und (**C^1 -Kontraktion**) sind wir in der Lage für $\alpha = 0.5$ und $\gamma = 12$ die Existenz eines Smaleschen Hufeisens in der „bouncing ball“-Abbildung $F_{\alpha,\gamma}$ zu beweisen.

Wir hatten uns schon die Lage entsprechender Streifen überlegt. Die vertikalen Streifen V_1 und V_2 ergeben sich als Zusammenhangskomponenten von $F_{\alpha,\gamma}(Q) \cap Q$ und sind enthalten in vertikalen Rechtecken:

$$V_1 \subset \{(x, y); 0.22 \leq x \leq 0.34, 0 \leq y \leq 1\}, \quad V_2 \subset \{(x, y); 0.71 \leq x \leq 0.87, 0 \leq y \leq 1\}$$

Insbesondere ist die konvexe Hülle von V_1 bzw. V_2 ebenfalls in diesen Rechtecken enthalten. Die horizontalen Streifen H_1 und H_2 sind die Urbilder von V_1 und V_2 und aus der Form von $F_{\alpha,\gamma}^{-1}$ ergibt sich sofort die Eingrenzung

$$H_1 \subset \{(x, y); 0 \leq x \leq 1, 0.22 \leq y \leq 0.34\}, \quad H_2 \subset \{(x, y); 0 \leq x \leq 1, 0.71 \leq y \leq 0.87\}.$$

Es genügt, die Bedingungen (**C^1 -Expansion**) und (**C^1 -Kontraktion**) nur für $(x, y) \in S = (\cup_i V_i) \cap (\cup_j H_j)$ nachzurechnen. Dies erleichtert die Angelegenheit beträchtlich. Wir beschränken uns wieder auf vertikale Streifen und auf Vorwärtsiterierte.

Man berechnet zunächst die Ableitung

$$DF_{\alpha,\gamma}(x, y) : \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \eta \\ -\alpha\xi + ((1 + \alpha) + \gamma \sin(2\pi y))\eta \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix}$$

Für $\mu = 0.2$ und $(x, y) \in S$ ist der Kegel $K^u = \{|\xi| < \mu|\eta|\}$ vorwärts invariant unter $DF_{\alpha,\gamma}(x, y)$, denn

$$\begin{aligned} |\eta_1| &= |-\alpha\xi + (1 + \alpha + \gamma \sin(2\pi y))\eta| \\ &\geq -|\alpha\xi| + |1 + \alpha + \gamma \sin(2\pi y)| \cdot |\eta| \\ &\geq -|\alpha\mu\eta| + |1 + \alpha + \gamma \sin(2\pi y)| \cdot |\eta| \quad \text{wegen } (\xi, \eta) \in K^u \\ &\geq \left(-\frac{1}{10} + \frac{3}{2} + 12 \sin(2\pi y)\right) \cdot |\eta| \\ &\geq 7|\eta| \end{aligned}$$

wobei wir die relativ groben Abschätzungen $12 \sin(2\pi x) \geq 12 \sin(2\pi \cdot 0.34) = 7.970 \dots > 7$ für $y \in [0.22, 0.34]$ und $|12 \sin(2\pi x)| \geq 12|\sin(2\pi \cdot 0.87)| = 8.747 \dots > 8$ für $y \in [0.71, 0.87]$ benutzt haben.

Die zweite Bedingung aus (**C^1 -Kontraktion**) ist noch leichter nachzuprüfen:

Wegen $(\xi, \eta) \in K^u$ gilt $|\xi| < \mu|\eta|$ und damit auch $|\xi| < \mu|\xi_1|$.

Ganz genauso zeigt man, dass Bedingung (**C^1 -Expansion**) gilt, indem man $DF_{\alpha,\gamma}^{-1}$ berechnet und wieder Schranken für $\sin(2\pi x)$ bzw. $\cos(2\pi x)$ für $x \in [0.22, 0.34] \cup [0.71, 0.87]$ ausnutzt.

Damit ist nun *bewiesen*, dass die „bouncing ball“-Abbildung tatsächlich ein Hufeisen enthält, also eine invariante Menge Λ mit unendlich vielen periodischen Punkten, unendlich vielen homoklinen/heteroklinen Punkten und mit nicht-periodischen Trajektorien, die in Λ dicht liegen.

Im Fall der „bouncing ball“-Abbildung ist Λ nicht die maximale invariante Menge \rightsquigarrow Übungsaufgabe.

7.4.2 Hufeisen in Hamilton-Systemen

Ein Hamilton-System im \mathbb{R}^{2n} ist eine Differentialgleichung der Form

$$\dot{x} = J\nabla H(x), \quad x \in \mathbb{R}^{2n}$$

wobei $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und J die $(2n) \times (2n)$ -Matrix

$$J = \begin{pmatrix} 0 - \text{Id}_n & \\ \text{Id}_n & 0 \end{pmatrix}$$

ist. Schreibt man $x = (p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, q_2, \dots, q_n)^T$, so lauten die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{p}_j &= -\frac{\partial H}{\partial q_j}, & j = 1, 2, \dots, n \\ \dot{q}_j &= \frac{\partial H}{\partial p_j}, & j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Man rechnet nun leicht nach, dass H eine Erhaltungsgröße ist, denn

$$\frac{d}{dt}H(x(t)) = \nabla H(x(t))\dot{x}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_j} \dot{p}_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_j} \dot{q}_j \\
&= \sum_{j=1}^n -\frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Falls $x = 0$ ein Gleichgewicht ist und $\lambda \neq 0$ ein Eigenwert der Linearisierung mit zugehörigem Eigenvektor v , dann ist auch Jv ein Eigenvektor der Linearisierung, und zwar zum Eigenwert $-\lambda$.

Insbesondere sind mit einem echt komplexen Eigenwert $\lambda = \alpha + i\omega$ auch $\bar{\lambda}$, $-\lambda$ und $-\bar{\lambda}$ Eigenwerte.

Im Fall $n = 2$, d.h. $x \in \mathbb{R}^4$ sind dies *alle* Eigenwerte. Die stabile und instabile Mannigfaltigkeit sind daher jeweils zweidimensional. Außerdem liegen $W^s(0)$ und $W^u(0)$ beide in der *Energiefläche* $E_0 := \{x \in \mathbb{R}^4; H(x) = 0\}$.

Falls ein homokliner Orbit γ existiert, also eine Lösung der Differentialgleichung mit $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \gamma(t) = 0$, dann liegt dieser in $W^s(0) \cap W^u(0)$ und damit in E_0 .

Man nennt einen homoklinen Orbit **transversal**, falls die Tangentialebenen an die Mannigfaltigkeiten $W^s(0)$ und $W^u(0)$ im Punkt $\gamma(0)$ den (drei-dimensionalen) Tangentialraum an E_0 im Punkt $\gamma(0)$ aufspannen.

Im Vortrag von Tobias wird mit Hilfe einer Hufeisenkonstruktion nach Satz 7.5 der folgende Satz bewiesen:

Satz 7.6 (Devaney, 1976) *Sei*

$$\dot{x} = J\nabla H(x), \quad x \in \mathbb{R}^4,$$

ein Hamilton-System mit analytischer Hamilton-Funktion H und $x = 0$ eine Ruhelage, so dass die Linearisierung $JD^2H(0)$ in $x = 0$ die echt komplexen Eigenwerte $\pm\alpha \pm i\omega$ besitzt ($\alpha, \omega > 0$). Außerdem existiere ein transversaler homokliner Orbit γ an $x = 0$. Sei Σ ein transversaler Schnitt zu γ in E_0 .

Dann existiert zu jedem $N \in \mathbb{N}$ eine invariante Menge $\Lambda_N \subset \Sigma$, so dass die Rückkehr-Abbildung $\Sigma \rightarrow \Sigma$ eingeschränkt auf Λ_N zum Bernoulli-Shift auf N Symbolen topologisch konjugiert ist.

7.5 Gleichmäßige Hyperbolizität

Das allgemeine Konzept, das hinter den beiden Bedingungen (C^1 -**Expansion**) und (C^1 -**Kontraktion**) steckt, heißt (gleichmäßige) **Hyperbolizität**.

Zunächst wollen wir an dieser Stelle (endlich) genau erklären, was eine (differenzierbare) Mannigfaltigkeit ist.

Definition: Eine n -dimensionale (topologische) **Mannigfaltigkeit** \mathcal{M} ist ein separabler, metrisierbarer topologischer Raum, der lokal homöomorph zum \mathbb{R}^n ist.

Dabei heißt ein topologischer Raum metrisierbar, wenn die Topologie durch eine Metrik erzeugt werden kann und separabel, wenn eine abzählbare dichte Teilmenge existiert. Die

lokale Homöomorphie bedeutet, dass zu jedem Punkt $x \in \mathcal{M}$ eine Umgebung U und ein Homöomorphismus ψ existiert, der U auf den \mathbb{R}^n abbildet.

Definition:

- (i) Sei \mathcal{M} eine n -dimensionale (topologische) Mannigfaltigkeit. Eine **Karte** für \mathcal{M} ist ein Homöomorphismus ψ zwischen offenen Mengen $U \subseteq \mathcal{M}$ und $V \subseteq \mathbb{R}^n$.
- (ii) Ein **Atlas** ist eine Kollektion von Karten, deren Urbildbereiche die gesamte Mannigfaltigkeit \mathcal{M} überdecken.
- (iii) Seien $\psi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ und $\psi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ zwei Karten auf \mathcal{M} . Dann bezeichnet man die beiden Homöomorphismen $\psi_1\psi_2^{-1} : \psi_2(U_1 \cap U_2) \rightarrow \psi_1(U_1 \cap U_2)$ und $\psi_2\psi_1^{-1} : \psi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \psi_2(U_1 \cap U_2)$ als **Kartenwechsel**.
- (iv) Ein Atlas heißt C^k -Atlas ($k = 1, 2, \dots$), falls alle Kartenwechsel C^k -Diffeomorphismen sind.

Eine Karte heißt mit dem C^k -Atlas \mathcal{A} **verträglich**, falls alle Kartenwechsel C^k -Diffeomorphismen sind. Aus einem C^k -Atlas \mathcal{A} kann man einen maximalen C^k -Atlas machen, indem man alle mit \mathcal{A} verträglichen Karten hinzunimmt.

Definition: Eine n -dimensionale **differenzierbare Mannigfaltigkeit** \mathcal{M} ist eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit mit einem maximalen C^1 -Atlas.

Beispiel:

1. **Kreislinie S^1 , Sphären S^n**

Wir wollen für die n -Sphäre, definiert als

$$S^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; \sum_{j=1}^{n+1} x_j^2 = 1\},$$

zwei Karten explizit angeben. Dazu betrachten wir die Mengen $\mathcal{U}_S := S^n \setminus N$ und $\mathcal{U}_N := S^n \setminus S$, wobei $N = (0, 0, \dots, 0, 1)$ der Nordpol und $S = (0, 0, \dots, 0, -1)$ der Südpol der Sphäre ist.

Als Karten wählen wir die *stereographische Projektion*: Sei $\tilde{x} := (x_1, x_2, \dots, x_n)$ und definiere

$$\begin{aligned} \varphi_S : \mathcal{U}_S &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (\tilde{x}, x_{n+1}) &\mapsto \frac{\tilde{x}}{1 - x_{n+1}} =: y. \end{aligned}$$

Dann ist die Umkehrabbildung $\varphi_S^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{U}_S$ explizit gegeben durch

$$y \mapsto \left(\frac{2y}{|y|^2 + 1}, \frac{|y|^2 - 1}{|y|^2 + 1} \right).$$

Genauso kann man für \mathcal{U}_N die stereographische Projektion

$$\begin{aligned}\varphi_N : \mathcal{U}_N &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (\tilde{x}, x_{n+1}) &\mapsto \frac{\tilde{x}}{1 + x_{n+1}} =: z.\end{aligned}$$

mit Umkehrabbildung

$$\begin{aligned}\varphi_N^{-1} : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathcal{U}_N \\ z &\mapsto \left(\frac{2z}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right).\end{aligned}$$

betrachten. Es gilt natürlich

$$\mathcal{U}_N \cap \mathcal{U}_S = S^n \setminus \{S, N\}$$

und

$$\varphi_N(\mathcal{U}_N) = \varphi_S(\mathcal{U}_S) = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Kartenwechsel $\varphi_S \circ \varphi_N^{-1}$:

$$z \longrightarrow \left(\frac{2z}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) \longrightarrow \frac{2z}{|z|^2 + 1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}} = \frac{z}{|z|^2} \in S^n$$

ist beliebig oft differenzierbar.

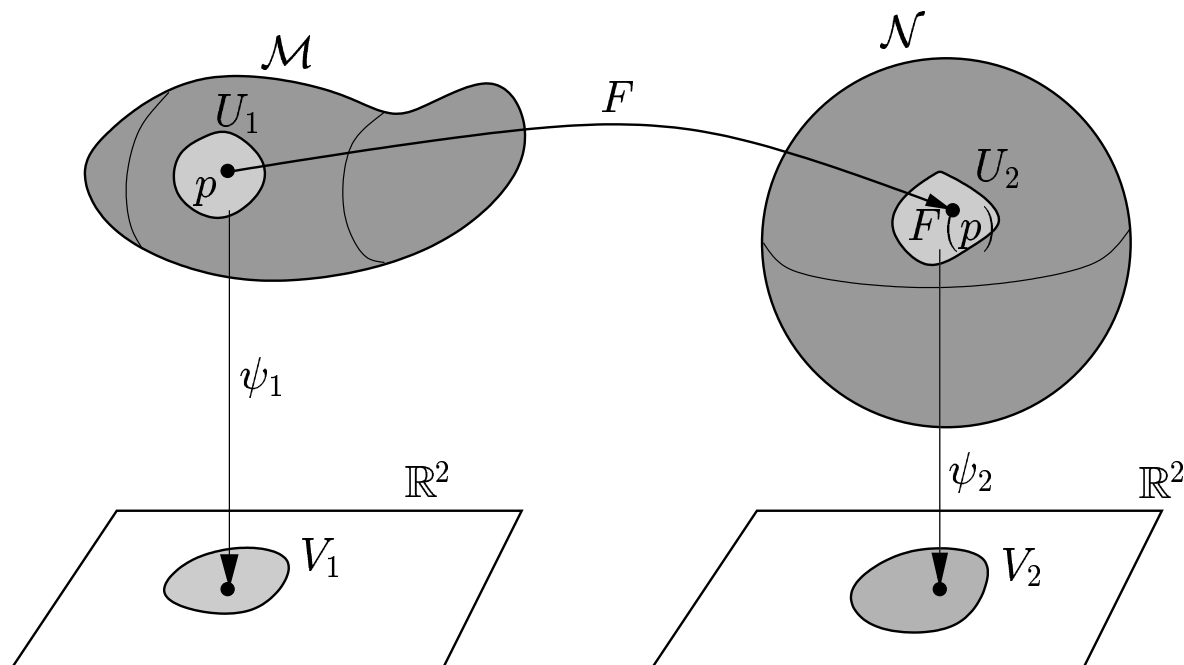
2. Möbiusband

3. Torus \mathbb{T}^n

Definition: Seien \mathcal{M} und \mathcal{N} differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Eine Abbildung $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ ist dann differenzierbar, falls zu jedem $p \in \mathcal{M}$ Karten $\psi_1 : U_1 \rightarrow V_1 \subset \mathbb{R}^m$ um p in \mathcal{M} und $\psi_2 : U_2 \rightarrow V_2 \subset \mathbb{R}^n$ um $f(p)$ in \mathcal{N} existieren, so dass $\psi_2 \circ F \circ \psi_1^{-1} : V_1 \rightarrow V_2$ differenzierbar ist.

Die Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit erlaubt uns, in jedem Punkt der Mannigfaltigkeit einen Tangentialraum zu definieren. Anschaulich kann man sich den Tangentialraum in vielen Fällen tatsächlich als einen n -dimensionalen Vektorraum vorstellen, der in einem Punkt tangential an die Mannigfaltigkeit angeheftet ist. Dabei ist zu beachten, dass es zu jedem Punkt $p \in \mathcal{M}$ einen eigenen Tangentialraum $T_p\mathcal{M}$ gibt, und dass die Tangentialräume an verschiedene Punkte zwar beide isomorph zum \mathbb{R}^n sind, dass es aber keine kanonische Abbildung gibt, die die beiden Räume miteinander verknüpft. Insbesondere schneiden sich die Tangentialräume an zwei verschiedene Punkte der Mannigfaltigkeit nicht.

Definition:



- (i) Sei $\gamma : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathcal{M}$ eine differenzierbare Kurve auf einer Mannigfaltigkeit \mathcal{M} mit $\gamma(0) = p$. Wir führen auf der Menge dieser Kurven eine Äquivalenzrelation ein: Zwei Kurven γ_1 und γ_2 sind dabei äquivalent, falls für irgendeine Karte $\psi : U \rightarrow V$ die Kurven $\psi\gamma_1$ und $\psi\gamma_2$ in 0 tangential zueinander sind. Jede solche Äquivalenzklasse bezeichnen wir als einen **Tangentialvektor**. Der **Tangentialraum** $T_p\mathcal{M}$ im Punkt p ist die Menge aller Tangentialvektoren und trägt eine Vektorraumstruktur.
- (ii) Das **Tangentialbündel** $T\mathcal{M}$ ist die Vereinigung aller Tangentialräume $\cup_{p \in \mathcal{M}} T_p\mathcal{M}$

Das Tangentialbündel ist selbst eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension $\dim T\mathcal{M} = 2 \dim \mathcal{M}$.

Seien \mathcal{M}, \mathcal{N} differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ eine differenzierbare Abbildung, d.h. für beliebige Karten $\psi_{\mathcal{M}}$ und $\psi_{\mathcal{N}}$ ist $\psi_{\mathcal{N}} \circ f \circ \psi_{\mathcal{M}}^{-1}$ differenzierbar.

Zu jedem Tangentialvektor $\xi \in T_p\mathcal{M}$ kann man nun eine glatte Kurve γ auf \mathcal{M} wählen. Deren Bild unter f ist eine glatte Kurve auf \mathcal{N} durch den Punkt $f(p)$. Diese Kurve bestimmt wiederum einen Tangentialvektor $\eta \in T_{f(p)}\mathcal{N}$, der unabhängig von der Wahl von γ ist.

Definition: Die so definierte lineare Abbildung

$$Df_p : T_p\mathcal{M} \rightarrow T_{f(p)}\mathcal{N}$$

heißt **Ableitung** von f in p .

Durchläuft p alle Punkte auf \mathcal{M} , so erhält man die **Differentialabbildung**

$$Df_p : T\mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{N}.$$

Nach diesen Vorbereitungen kehren wir zurück zu Dynamischen Systemen.

Definition: Sei \mathcal{M} eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ ein Diffeomorphismus. Eine kompakte f -invariante Menge Λ heißt **hyperbolisch**, falls sich für jedes $x \in \Lambda$ der Tangentialraum $T_x\mathcal{M}$ zerlegen lässt in Unterräume $T_x\mathcal{M} = E_x^s \oplus E_x^u$, und es Konstanten $C > 0$, $\lambda \in (0, 1)$ gibt, so dass die folgenden Eigenschaften gelten:

1. **Invarianz:** $Df_x(E_x^s) = E_{f(x)}^s$ und $Df_x^{-1}(E_x^u) = E_{f^{-1}(x)}^u$.
2. **Expansion/Kontraktion:** , $\|Df_x^n(v)\| \leq C\lambda^n\|v\|$ für alle $v \in E_x^s$ und alle $n \geq 0$,
 $\|Df_x^n(v)\| \leq C\lambda^n\|v\|$ für alle $v \in E_x^u$ und alle $n \leq 0$.
3. **Stetigkeit:** Die Räume E_x^s und E_x^u hängen stetig von x ab, d.h. falls $x_n \rightarrow x$, $x_n \in \Lambda$, dann gilt $E_{x_n}^s \rightarrow E_x^s$ und $E_{x_n}^u \rightarrow E_x^u$.

Beispiele:

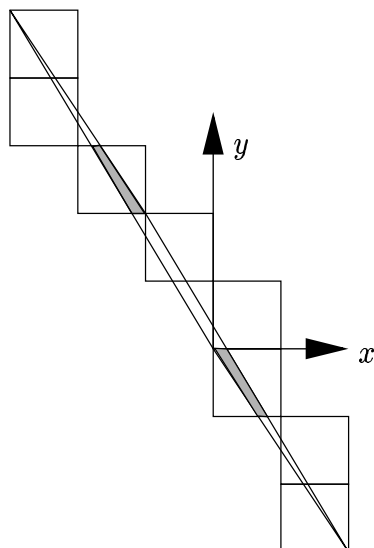
1. **Hyperbolischer Fixpunkt** Sei $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus mit $F(0) = 0$. Falls die Jacobi-Matrix $A := DF(0)$ Eigenwerte mit Betrag $\neq 1$ besitzt, dann ist $\{0\}$ eine hyperbolische Menge. Die Räume E_0^s bzw. E_0^u sind der stabile bzw. instabile Unterraum des Fixpunktes $x = 0$.
2. **Hyperbolischer periodischer Orbit** Sei $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus mit $F^k(p) = p$. Falls die Jacobi-Matrix $A := DF^k(p)$ nur Eigenwerte mit Betrag $\neq 1$ besitzt, dann ist $\{p, F(p), F^2(p), \dots, F^{k-1}(p)\}$ eine invariante hyperbolische Menge. Die Räume E_x^s bzw. E_x^u sind die stabilen bzw. instabilen Unterräume von x aufgefasst als Fixpunkt von F^k .
3. **Smalesches Hufeisen**
4. **Anosov–Diffeomorphismus** Betrachte die Abbildung $a : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2 \cong \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ auf dem Torus, die gegeben ist durch die lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$x \mapsto Ax = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x.$$

Die Matrix A besitzt die Eigenwerte $\lambda_- = \frac{3-\sqrt{5}}{2} < 1$ und $\lambda_+ = \frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1$. Hier ist der gesamte Torus \mathbb{T}^2 eine hyperbolische Menge. Die Räume E_x^s und E_x^u erhält man, indem man die Eigenvektoren e_- bzw. e_+ in den Punkt x verschiebt.

Wir gehen nicht im Detail auf die Anosov–Abbildung ein, sondern notieren nur kurz zwei interessante Eigenschaften:

- Alle Punkte mit rationalen Koordinaten sind periodische Punkte, da die Abbildung A rationale Punkte auf rationale Punkte abbildet und zudem den Nenner nicht vergrößert. Da es nur endlich viele rationale Punkte mit beschränktem Nenner auf dem Torus gibt, muss der Orbit periodisch sein.
- Iterierte A^{-2} der Anosov–Abbildung enthalten ein Hufeisen: Die Bedingungen **C^1 -Expansion** und **C^1 -Kontraktion** lassen sich wegen der linearen Struktur von A sehr leicht nachprüfen.



7.6 Konsequenzen der Hyperbolizität

Die Existenz einer hyperbolischen Struktur auf einer invarianten Menge hat viele Auswirkungen auf die Dynamik.

Im folgenden erläutern wir einige der Konsequenzen, ohne detaillierte Beweise zu geben. Solche finden sich beispielsweise in [Katok & Hasselblatt], [Robinson] oder [Guckenheimer, Moser, Newhouse].

Satz 7.7 (Strukturelle Stabilität, ohne Beweis) Sei f ein C^1 -Diffeomorphismus mit einer kompakten, invarianten, hyperbolischen Menge Λ . Dann existiert eine Umgebung U von Λ und eine C^1 -Umgebung N von f im Funktionenraum, so dass für alle $g \in N$, die Menge $\Lambda(g) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} g^n(U)$ eine hyperbolische Menge ist und $f|_{\Lambda}$ und $g|_{\Lambda(g)}$ zueinander C^0 -konjugiert sind, d.h. es existiert $h : \Lambda \rightarrow \Lambda(g)$ mit $h \circ f = g \circ h$.

Ein Punkt x gehört zu $\Lambda(g)$ genau dann, falls $g^n(x) \in U$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Hat man also eine kompakte, invariante, hyperbolische Menge und stört die Abbildung ein wenig, dann hat die gestörte Abbildung eine invariante hyperbolische Menge in der Nähe der ursprünglichen Menge. Die hyperbolische Menge Λ ist **stabil** unter Störungen von f .

Definition: Sei X ein normierter Raum und $f : X \rightarrow X$ eine Abbildung. Eine Folge (x_i) heißt dann **δ -Pseudo-Orbit**, falls

$$\|f(x_i) - x_{i+1}\| \leq \delta \quad \forall i$$

Man kann δ beispielsweise als Schranke für den Fehler bei einer numerischen Berechnung interpretieren: x_{i+1} ist nicht das *exakte* Bild von x_i , sondern mit einem kleinen Fehler behaftet.

Definition: Sei (x_i) ein δ -Pseudo-Orbit für die Abbildung $f : X \rightarrow X$. Dann heißt ein (echter) Orbit $(f^i(y))_{i \in \mathbb{Z}}$ **ε -Schatten**, falls $\|f^i(y), x_i\| < \varepsilon$ für alle $i \in \mathbb{Z}$.

Satz 7.8 (Schattenlemma, “Shadowing Lemma”) Sei Λ eine kompakte, invariante, hyperbolische Menge. Dann existiert zu jedem hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ und eine Umgebung U von Λ , so dass jeder δ -Pseudoorbit (x_i) in U einen ε -Schatten besitzt. Anders ausgedrückt: es gibt ein (eindeutiges) $y \in \Lambda$ mit $\|f^i(y), x_i\| < \varepsilon$ für alle $i \in \mathbb{Z}$.

Interpretation: Jeder mit Genauigkeit δ berechnete (Pseudo-)Orbit ist bis auf einen Fehler von höchstens ε eine Approximation für den echten Orbit des (unbekannten) Punktes y , und zwar auf dem unendlichen Bereich $i \in \mathbb{Z}$!

Satz 7.9 (λ -Lemma, inclination lemma, Palis 1969)

Sei F ein Diffeomorphismus und q ein hyperbolischer Fixpunkt von F .

Die Linearisierung in p besitze m_u instabile und m_s stabile Eigenwerte. Sei D^u eine kleine Kreisscheibe der Dimension m_u , die transversal zur lokalen stabilen Mannigfaltigkeit $W_{loc}^s(p)$ ist. Sei außerdem Δ eine Kreisscheibe in der instabilen Mannigfaltigkeit $W^u(p)$. Dann gibt es für beliebig kleine $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $n = n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, und eine Teilmenge $D = D(\varepsilon) \subset D^u$, so dass $f^n(D)$ sich in der C^1 -Norm nur um höchstens ε von Kreisscheibe Δ unterscheidet.

Bemerkung: Es genügt dabei, Kreisscheiben in der lokalen instabilen Mannigfaltigkeit $W_{loc}^u(p)$ zu betrachten. Dann lässt sich Δ und $f^n(D)$ als Graph über dem Eigenraum E^u schreiben und es ist klar, wie der Abstand in C^1 definiert ist.

Für beliebige Kreisscheiben $\Delta \subset W^u(p)$ benutzt man dann die Abbildung f^{-k} mit geeignetem k um $f^{-k}\Delta \subset W_{loc}^u(p)$ zu erreichen. Man zeigt dann, dass $f^n(D)$ sogar $\varepsilon/\|f^k\|_{C^1}$ gilt für hinreichend großes n und schließt daraus dann, dass $f^{n+k}(D)$ immer noch ε -nahe an Δ liegt.

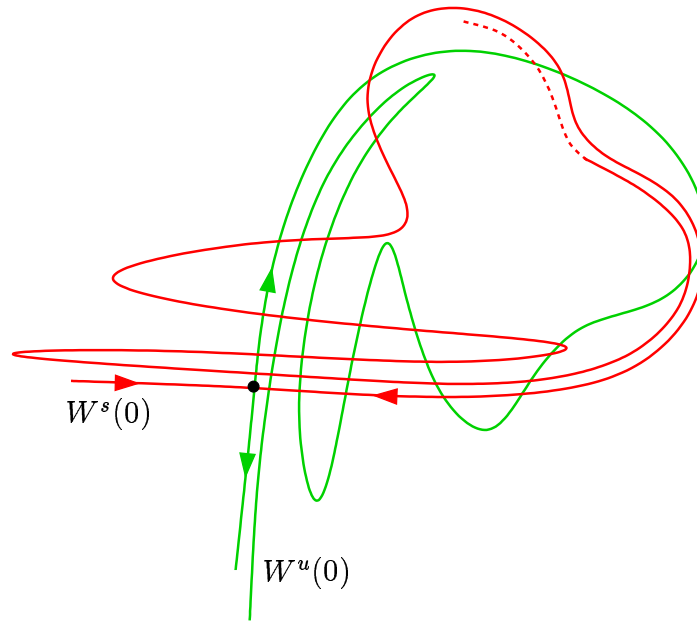
7.7 Transversale homokline Orbits und Hufeisen–Dynamik

Komplizierte Hufeisen–Dynamik kann verursacht werden durch das Vorhandensein von homoklinen Orbits, falls sich die stabile und instabile Mannigfaltigkeit nur transversal schneiden. Das λ -Lemma bewirkt dann, dass die instabile Mannigfaltigkeit sich auf sehr komplizierte Weise auf sich selbst häuft. Genauso wird auch die stabile Mannigfaltigkeit eine sehr komplizierte Menge sein. In der folgenden Abbildung wird versucht, dies anzudeuten, in Wirklichkeit befinden sich aber zwischen den verschiedenen Bögen noch unendlich viele weitere Abschnitte der stabilen bzw. instabilen Mannigfaltigkeit. Schon Poincaré hat diese komplizierte geometrische Struktur gesehen und erkannt, dass sie tiefgreifende Konsequenzen für die Dynamik hat. Präzise gemacht wurde das Ganze dann durch Smale mit dem folgenden Satz:

Satz 7.10 (Smale) Sei $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein Diffeomorphismus mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $F(0) = 0$ und die Linearisierung $DF(0)$ besitzt reelle Eigenwerte μ, λ mit $0 < \mu < 1 < \lambda$.

(ii) $W^s(0)$ und $W^u(0)$ schneiden sich transversal in einem homoklinen Punkt q .



Dann existiert eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass F^n eine invariante, hyperbolische Menge Λ besitzt, auf der F^n topologisch konjugiert ist zum Shift $\sigma : \Omega_2 \rightarrow \Omega_2$ auf zwei Symbolen.

Bemerkung: Wenn $W^s(0)$ und $W^u(0)$ sich in q schneiden, dann natürlich auch in allen Punkten $F^k(q)$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Da F ein Diffeomorphismus ist, sind auch diese Schnitte alle transversal.

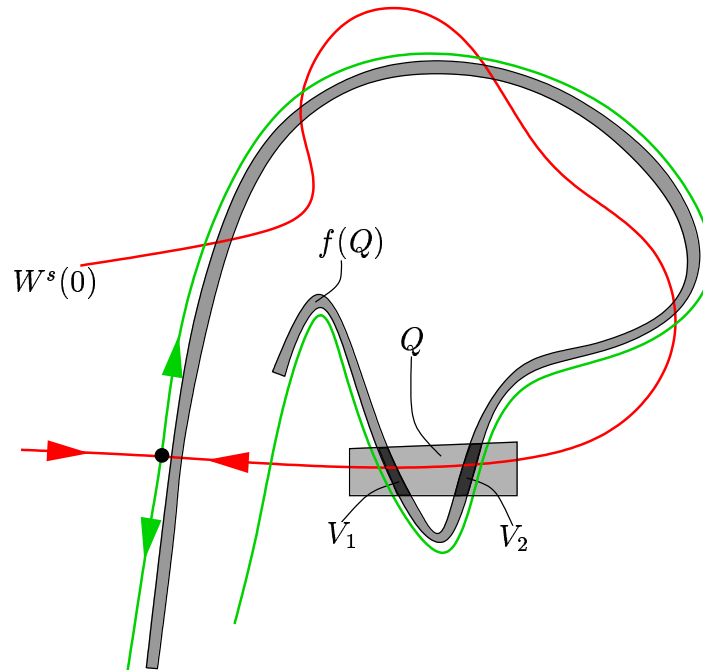
Die Abbildung zeigt, wie die richtigen Streifen konstruiert werden. Um die Bedingungen **C^1 -Expansion** und **C^1 -Kontraktion** nachzuprüfen, kann man dann beispielsweise das λ -Lemma verwenden.

7.8 Ausblick

Die Theorie (gleichmäßig) hyperbolischer dynamischer Systeme ist sehr weit entwickelt. Leider musste man schon in den 1960er Jahren feststellen, dass diese Klasse von Dynamischen Systemen *keine* offene und dichte Teilmenge im Raum aller Dynamischen Systeme, etwa bezüglich der C^1 -Norm, bildet. Es gibt also *strukturell instabile* Dynamische Systeme, d.h. Diffeomorphismen, in deren Umgebung *kein* strukturell stabiler Diffeomorphismus liegt.

Aus diesem Grund sucht man in den letzten zehn Jahren verstärkt nach schwächeren Konzepten, mit deren Hilfe sich die Theorie hyperbolischer dynamischer Systeme ausweiten lässt. Dazu gehören *nicht-gleichmäßig hyperbolische Systeme*, *partiell hyperbolische Systeme* oder solche mit einer *dominierenden Zerlegung*.

Von Palis stammt die (bis jetzt nur teilweise bewiesene) Vermutung, dass das Komplement aller diskreten hyperbolischen Dynamischen Systeme eine dichte Menge an Diffeomorphismen enthält, die entweder einen heteroklinen Zyklus oder einen nicht-transversalen



homoklinen Punkt besitzen. Homokline und heterokline Trajektorien spielen daher eine bedeutende Rolle beim globalen Verständnis dynamischer Systeme.