8 Zentrumsmannigfaltigkeiten und Normalform

Dieses Kapitel ist angelehnt an [A. Vanderbauwhede: *Centre Manifolds, Normal Forms and Elementary Bifurcations*, Dynamics Reported **2**, 1989].

8.1 Zentrumsmannigfaltigkeiten für Differentialgleichungen

Analog zur stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten von *hyperbolischen* Ruhelagen, kann man auch (lokal) invariante Mannigfaltigkeiten finden, wenn eine Ruhelage nicht hyperbolisch ist.
Damals waren die stabile bzw. instabile Mannigfaltigkeit tangential an den entsprechenden (verallgemeinerten) Eigenraum und lokal als Graph über diesem Eigenraum konstruiert worden. Diese Konstruktion funktioniert auch in der Nähe nicht-hyperbolischer Gleichgewichte, allerdings zerfällt das Spektrum der Linearisierung in *drei* Teile: den stabilen Anteil, den instabilen Anteil und den Zentrums–Anteil, der zu Eigenwerten mit verschwindendem Realteil gehört.
Man kann leicht nachprüfen, dass unser Satz über die stabile Mannigfaltigkeit auch noch gilt, wenn die Linearisierung rein imaginäre Eigenwerte besitzt. Die stabile Mannigfaltigkeit ist dann lokal charakterisiert als die Menge aller Anfangsbedingungen, für die die Lösung exponentiell gegen 0 konvergiert. Technisch realisiert man das, indem man den Beweis aus Kapitel 6 in den exponentiell gewichteten Räumen BC^0_η mit $\eta < 0$ und $|\eta|$ klein fast wörtlich kopiert. Genauso existiert natürlich auch eine instabile Mannigfaltigkeit. Im folgenden wollen wir uns auf die invariante Mannigfaltigkeit konzentrieren, die zum neutralen Teil des Spektrums gehört.
Schon im linearen Fall entsprechen beschränkte oder nur polynomial anwachsende Lösungen Eigenwerten mit verschwindendem Realteil, daher ist es insbesondere unser Ziel, eine invariante Menge zu konstruieren, die alle *beschränkten* Lösungen in der Nähe der Ruhelage enthält.

Satz 8.1 (Zentrumsmannigfaltigkeit, global) *Betrachte nichtlineare Differentialgleichungen der Form*

$$\dot{x} = Ax + g(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

mit $g \in BC^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $g(0) = Dg(0) = 0$ und zugehörigem Fluss Φ_t.
Zerlege das Spektrum $\sigma(A)$ in die drei Teile

$$\sigma^s := \sigma(A) \cap \{\operatorname{Re} z < 0\},\ \sigma^c := \sigma(A) \cap \{\operatorname{Re} z = 0\} \text{ und } \ \sigma^u := \sigma(A) \cap \{\operatorname{Re} z > 0\}.$$

Seien E^s, E^c und E^u die entsprechenden (verallgemeinerten) Eigenräume von A. Wir schreiben auch $E^h := E^s \oplus E^u$ für den hyperbolischen Teil von A und $P^h : \mathbb{R}^n \to E^s \oplus E^u$ für die kanonische Projektion.
Dann existiert zu jeder gegebenen Matrix A ein $\gamma > 0$, so dass für alle Nichtlinearitäten $g \in BC^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ mit Lipschitz-Konstante $Lip(g) < \gamma$ gilt:
Die Menge

$$W^c(0) := \{x_0 \in \mathbb{R}^n;\ \sup_{t \in \mathbb{R}} |P^h \Phi_t(x_0)| < \infty\}$$

ist (positiv und negativ) invariant.

$W^c(0)$ ist ein Graph über dem Zentrums–Eigenraum E^c:

$$W^c(0) = \operatorname{graph}(\Psi) = \{(x^c, x^h) \in E^c \times E^h;\ x^h = \Psi(x^c)\}$$

mit einer Lipschitz-stetigen Funktione $\Psi : E^c \to E^h$.
Damit ist $W^c(0)$ eine Mannigfaltigkeit und hat dieselbe Dimension wie E^c. $W^c(0)$ heißt **globale Zentrumsmannigfaltigkeit**.

Der Beweis von Satz 8.1 verläuft ähnlich wie im Fall der lokalen stabilen Mannigfaltigkeit: Man nutzt Abschätzungen für die linearisierte Gleichung aus, um die Differentialgleichung in eine geeignete Integralgleichung zu übersetzen, die man dann mit einem Fixpunktargument lösen kann.
Daraus konstruiert man sich die Abbildung Ψ und verifiziert anschließend, dass alle Eigenschaften erfüllt sind.

Notation: Wir bezeichnen mit $P^s : \mathbb{R}^n \to E^s$, $P^c : \mathbb{R}^n \to E^c$ und $P^u : \mathbb{R}^n \to E^u$ die Projektionen auf die Unterräume. Für $x \in \mathbb{R}^n$ schreiben wir $x^s := P^s x$, $x^c := P^c x$ und $x^u := P^u x$.
Der lineare Fluss e^{At} lässt die drei Unterräume E^s, E^u und E^c invariant Es gibt Konstanten C, $\beta > 0$, so dass für den hyperbolischen Anteil von e^{At} die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|e^{At}P^s\| &\leq Ce^{-\beta t} \text{ für } t \geq 0, \\ \|e^{At}P^u\| &\leq Ce^{\beta t} \text{ für } t \leq 0 \end{aligned}$$

gelten. Da die Lösungen der linearen Gleichung $\dot{x} = Ax$ auf dem Unterraum E^c für $t \to \pm\infty$ höchstens polynomial anwachsen können, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Konstante $M = M(\varepsilon)$, so dass

$$\|e^{At}P^c\| \leq M(\varepsilon)e^{\varepsilon|t|} \text{ für } t \in \mathbb{R}.$$

Dabei bezeichnet $\|\cdot\|$ eine Matrixnorm.

Aus der Vorlesung „Dynamik I“ ist bekannt, dass Differentialgleichungen mit höchstens linear anwachsender rechter Seite eine globale (d. h. für alle $t \in \mathbb{R}$ definierte) Lösung besitzen. Darüber brauchen wir uns hier also keine weiteren Gedanken machen.
Mit Hilfe der Variation–der–Konstanten–Formel können wir jede Lösung $x(t)$ der nichtlinearen Gleichung Gleichung

$$\dot{x} = Ax + g(x) \tag{1}$$

schreiben als

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}g(x(\tau))\,d\tau.$$

Die Projektionen P^s, P^c und P^u zerlegen diese Gleichung in das äquivalente System

$$\begin{aligned} x^s(t) = P^s x(t) &= e^{At}P^s x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}P^s g(x(\tau))\,d\tau \\ x^c(t) = P^c x(t) &= e^{At}P^c x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}P^c g(x(\tau))\,d\tau \\ x^u(t) = P^u x(t) &= e^{At}P^u x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}P^u g(x(\tau))\,d\tau. \end{aligned}$$

Beachte, dass e^{At} mit P^u, P^c und P^s kommutiert, da der lineare Fluss die entsprechenden Eigenräume invariant lässt.

Wähle nun $0 < \eta < \beta$ fest und betrachte den Banachraum

$$BC^0_\eta := \{x \in BC^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n);\, \|x\|_{BC^0_\eta} := \sup_{t\in\mathbb{R}} |x(t)e^{-\eta|t|}| < \infty\}$$

der Funktionen, die höchstens wie $e^{\eta|t|}$ anwachsen (siehe Übungsaufgabe 34). Damit sind insbesondere alle Funktionen mit polynomialem Wachstum in BC^0_η enthalten. Außerdem ist

$$\lambda \in \sigma^u \cup \sigma^s \Longrightarrow |\mathrm{Re}\,\lambda| > \eta.$$

Das nächste Lemma liefert eine alternative Charakterisierung der Menge $W^c(0) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \sup_{t\in\mathbb{R}} |P^h\Phi_t(x_0)| < \infty\}$.

Lemma: *Für $g \in BC^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und $\eta > 0$ wie oben gilt:*

$$W^c(0) = \{x_0 \in \mathbb{R}^n;\ \sup_{t\in\mathbb{R}} e^{-\eta|t|}|\Phi_t(x_0)| < \infty\}. \tag{2}$$

Beweis: Zeige zunächst, dass

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |P^h\Phi_t(x_0)| < \infty \implies \sup_{t\in\mathbb{R}} e^{-\eta|t|}|\Phi_t(x_0)| < \infty$$

Für den hyperbolischen Anteil $P^h\Phi_t(x_0)$ folgt die Beschränktheit aus der Definition von $W^c(0)$, wir müssen uns also nur noch um den Zentrumsanteil $x^c(t) = P^c\Phi_t(x_0)$ kümmern. Es gilt

$$\begin{aligned}
|x^c(t)| &= \left|e^{At}P^c x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}P^c g(x(\tau))\,d\tau\right| \\
&\leq \left\|e^{At}P^c\right\|\ |x_0| + \int_0^t \left\|e^{A(t-\tau)}P^c\right\|\ |g(x(\tau))|\,d\tau \\
&\leq M(\eta)e^{\eta|t|}|x_0| + \|g\|_{C^0}\, M \left|\int_0^t e^{\eta|t-\tau|}\,d\tau\right| \\
&\leq M(\eta)e^{\eta|t|}\left(|x_0| + \eta^{-1}\|g\|_{C^0}\right) \\
\Rightarrow \sup_{t\in\mathbb{R}} e^{-\eta|t|}|x^c(t)| &\leq M(\eta)\left(|x_0| + \eta^{-1}\|g\|_{C^0}\right)
\end{aligned}$$

Alle Punkte aus $W^c(0)$ erfüllen also die Charakterisierung (2).
Sei nun umgekehrt die Bedingung aus (2) erfüllt. Wir zeigen zunächst, dass $\sup_{t\in\mathbb{R}} |x^u(t)| < \infty$, falls $|x^u(t)| \leq M(\eta)e^{\eta|t|}$.
Benutze wieder die Variation–der–Konstanten–Formel

$$x^u(t) = e^{A(t-t_0)}x^u(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}P^u g(x(\tau))\,d\tau.$$

Für festes t und $t_0 \geq t$ schätzt man ab:

$$\begin{aligned}
|e^{A(t-t_0)}x^u(t_0)| &\leq Ce^{\beta(t-t_0)}\cdot M(\eta)e^{\eta t_0} \\
&\leq CM(\eta)e^{(\beta-\eta)(t-t_0)}e^{\eta t} \to 0 \ \text{ für } \ t_0 \to +\infty
\end{aligned}$$

Also ist

$$x^u(t) = -\int_t^\infty e^{A(t-\tau)} P^u g(x(\tau))\, d\tau$$

und damit

$$|x^u(t)| = \int_t^\infty |e^{A(t-\tau)} P^u g(x(\tau))|\, d\tau \le C\|g\|_{C^0} \int_t^\infty e^{\beta(t-\tau)}\, d\tau \le \frac{C\|g\|_{C^0}}{\beta}.$$

Genauso beweist man, dass auch $\sup_{t\in\mathbb{R}} |x^s(t)| < \infty$. □

Ähnliche Argumente kann man benutzen, um die Gleichungen noch etwas zu vereinfachen:

Lemma:

(i) Falls $x(t) = (x^s(t), x^c(t), x^u(t))$ eine Lösung von (1) ist, die für $t \ge 0$ beschränkt bleibt, dann erfüllt x^u die Integralgleichung

$$x^u(t) = -\int_t^\infty e^{A(t-\tau)} P^u g(x(\tau))\, d\tau.$$

Falls $x^s(t)$ für alle $t \le 0$ beschränkt bleibt, dann erfüllt x^s die Integralgleichung

$$x^s(t) = \int_{-\infty}^t e^{A(t-\tau)} P^s g(x(\tau))\, d\tau.$$

(ii) Umgekehrt gilt: Falls $x^s(t)$ und $x^u(t)$ beschränkte Lösungen dieser Integralgleichungen sind, dann ist $x(t)$ eine Lösung von (1), so dass $P^h x$ gleichmäßig beschränkt ist für alle $t \in \mathbb{R}$.

Beweis des Lemmas: (i) Für festes $t \ge 0$ und beliebiges $T > t$ gilt:

$$x^u(t) = e^{A(t-T)} x^u(T) + \int_T^t e^{A(t-\tau)} P^u g(x(\tau))\, d\tau.$$

Nun gilt

$$|e^{A(t-T)} x^u(T)| \le \|e^{A(t-T)}\|\, |x^u(T)| \le C e^{-\beta(t-T)} |x^u(T)|.$$

Für $T \to +\infty$ strebt dieser Term gegen 0, da ja x^u beschränkt ist. Der zweite Term strebt gegen $\int_\infty^t e^{A(t-\tau)} P^u g(x(\tau))\, d\tau$. Dieses uneigentliche Integral ist absolut konvergent, da

$$|e^{A(t-\tau)} P^u g(x(\tau))| \le \|e^{A(t-\tau)} P^u\|\, |g(x(\tau))| \le C e^{\beta(t-\tau)} |g(x(\tau))| \text{ für } \tau \ge t.$$

Die Behauptung über x^s beweist man wieder völlig analog.

(ii) Umgekehrt rechnet man durch Differenzieren nach, dass jede Lösung der Integralgleichung eine Lösung von (1) liefert. □

Damit haben wir als Konsequenz für Lösungen der Differentialgleichung $\dot{x} = Ax + g(x)$, deren Anteil $P^h x$ gleichmäßig beschränkt ist, die Darstellung

$$x(t) = \underbrace{e^{At} P^c x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} P^c g(x(\tau))\, d\tau}_{\in E^c} + \underbrace{\int_{-\infty}^t e^{A(t-\tau)} P^s g(x(\tau))\, d\tau}_{\in E^s} - \underbrace{\int_t^\infty e^{A(t-\tau)} P^u g(x(\tau))\, d\tau}_{\in E^u}.$$

Beweis des Satzes über die Zentrumsmannigfaltigkeit:
Sei wieder $0 < \eta < \beta$. Wir definieren für $x \in BC_\eta^0$ und festes x_0^c die Abbildung

$$T(x) := e^{At}x_0^c + \int_0^t e^{A(t-\tau)}P^c g(x(\tau))\,d\tau + \int_{-\infty}^t e^{A(t-\tau)}P^s g(x(\tau))\,d\tau - \int_t^\infty e^{A(t-\tau)}P^u g(x(\tau))\,d\tau$$

durch die rechte Seite der Integralgleichung. Fixpunkte von T sind dann Lösungen der Integralgleichung.

Um den Banachschen Fixpunktsatz anwenden zu können, muss man zeigen, dass $T : BC_\eta^0 \longrightarrow BC_\eta^0$ eine Kontraktion ist.
1. Behauptung: T bildet tatsächlich BC_η^0 in sich ab.
x^s–Komponente:

$$\begin{aligned}
& \sup_{t\in\mathbb{R}} e^{-\eta|t|}\left|\int_{-\infty}^t e^{A(t-\tau)}P^s g(x(\tau))\,d\tau\right| \\
\leq\ & \sup_{t\in\mathbb{R}} e^{-\eta|t|}\int_{-\infty}^t \left\|e^{A(t-\tau)}P^s\right\|\ |g(x(\tau))|\,d\tau \\
\leq\ & \sup_{t\in\mathbb{R}} e^{-\eta|t|}\int_{-\infty}^t Ce^{-\beta(t-\tau)}|g(x(\tau))|\,d\tau \\
\leq\ & \sup_{t\in\mathbb{R}} e^{-\eta|t|}\int_{-\infty}^t Ce^{-\beta(t-\tau)}\mathrm{Lip}\,(g)|x(\tau)|\,d\tau \qquad (\text{wegen }\ g(x(\tau)) = g(x(\tau)) - g(0)) \\
\leq\ & C\,\gamma\,\|x\|_\eta\ \sup_{t\in\mathbb{R}} e^{-\beta t-\eta|t|}\int_{-\infty}^t e^{\beta\tau}e^{\eta|\tau|}\,d\tau \quad (*)
\end{aligned}$$

Unterscheide jetzt zwei Fälle:
Für $t \leq 0$ ist

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^t e^{\beta\tau}e^{\eta|\tau|}\,d\tau &= \int_{-\infty}^t e^{(\beta-\eta)\tau}\,d\tau = \frac{e^{(\beta-\eta)t}}{\beta-\eta} \\
\Longrightarrow \sup_{t\leq 0} e^{-\beta t-\eta|t|}\int_{-\infty}^t e^{\beta\tau}e^{\eta|\tau|}\,d\tau &= \sup_{t\leq 0}\ e^{(\eta-\beta)t}\ \frac{e^{(\beta-\eta)t}}{\beta-\eta} = \frac{1}{\beta-\eta},
\end{aligned}$$

während für $t > 0$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^t e^{\beta\tau}e^{\eta|\tau|}\,d\tau &= \int_{-\infty}^0 e^{\beta\tau}e^{\eta|\tau|}\,d\tau + \int_0^t e^{\beta\tau)}e^{\eta|\tau|}\,d\tau \\
&= \int_{-\infty}^0 e^{(\beta-\eta)\tau}\,d\tau + \int_0^t e^{(\beta+\eta)\tau}\,d\tau \\
&= \frac{1}{\beta-\eta} + \frac{e^{(\beta+\eta)t}-1}{\beta+\eta} \\
\Longrightarrow \sup_{t\geq 0} e^{-\beta t-\eta|t|}\int_{-\infty}^t e^{\beta\tau}e^{\eta|\tau|}\,d\tau &= \sup_{t\geq 0} e^{-(\beta+\eta)t}\left(\frac{1}{\beta-\eta} + \frac{e^{(\beta+\eta)t}-1}{\beta+\eta}\right) < \infty.
\end{aligned}$$

Insgesamt ist daher

$$(*) \leq \tilde{C}\gamma\|x\|_\eta.$$

x^u–Komponente: ganz genauso

x^c–Komponente:

$$
\begin{aligned}
& \sup_{t\in\mathbb{R}} e^{-\eta|t|} \left| e^{At} x_0^c + \int_0^t e^{A(t-\tau)} P^c g(x(\tau))\, d\tau \right| \\
\le\ & \sup_{t\in\mathbb{R}} e^{-\eta|t|} M(\varepsilon) e^{\varepsilon|t|} |x(0)| + \sup_{t\in\mathbb{R}} e^{-\eta|t|} \int_0^t M(\varepsilon) e^{\varepsilon|t-\tau|} |g(x(\tau))|\, d\tau \\
\le\ & M(\varepsilon)|x_0^c| \sup_{t\in\mathbb{R}} e^{-(\eta-\varepsilon)|t|} + \sup_{t\in\mathbb{R}} e^{-\eta|t|} \int_0^t M(\varepsilon) e^{\varepsilon|t-\tau|} \mathrm{Lip}\,(g) |x(\tau)|\, d\tau \\
\le\ & C_1 + M(\varepsilon)\,\gamma\,\|x\|_\eta \sup_{t\in\mathbb{R}} e^{-\eta|t|} \int_0^t e^{\varepsilon|t-\tau|} e^{\eta|\tau|}\, d\tau
\end{aligned}
$$

Unterscheide wieder die Fälle $t \le 0$ und $t > 0$:
Für $t \le 0$ ist

$$
\begin{aligned}
\int_0^t e^{\varepsilon|t-\tau|} e^{\eta|\tau|}\, d\tau &= \int_0^t e^{-\varepsilon(t-\tau)} e^{-\eta\tau}\, d\tau \le \frac{e^{-\varepsilon t}}{\eta-\varepsilon} \\
\Longrightarrow \sup_{t\le 0} e^{-\eta|t|} \int_0^t e^{\varepsilon|t-\tau|} e^{\eta|\tau|}\, d\tau &= \sup_{t\le 0} e^{\eta t} \frac{e^{-\varepsilon t}}{\eta-\varepsilon} < \infty.
\end{aligned}
$$

Analog ist für $t \ge 0$

$$
\begin{aligned}
\int_0^t e^{\varepsilon|t-\tau|} e^{\eta|\tau|}\, d\tau &= \int_0^t e^{\varepsilon(t-\tau)} e^{\eta\tau}\, d\tau \le \frac{e^{\varepsilon t}}{\eta-\varepsilon} \\
\Longrightarrow \quad \sup_{t\ge 0}\ e^{-\eta|t|} \int_0^t e^{\varepsilon|t-\tau|} e^{\eta|\tau|}\, d\tau &= \sup_{t\ge 0} \frac{e^{-(\eta-\varepsilon)t}}{\eta-\varepsilon} < \infty.
\end{aligned}
$$

Insgesamt ist daher auch der Zentrumsanteil in der Norm $\|\cdot\|_\eta$ beschränkt.
2. Behauptung: T ist eine Kontraktion mit Kontraktionsrate $1/2$, wenn γ hinreichend klein ist:
Der Beweis dieser Aussage ist völlig analog zum Beweis der ersten Behauptung. Seien x_1, $x_2 \in BC_\eta^0$. Dann ist

$$
\begin{aligned}
\|P^s T(x_1) - P^s T(x_2)\|_{BC_\eta^0} &= \sup_{t\in\mathbb{R}} e^{-\eta|t|} \left| \int_{-\infty}^t e^{A(t-\tau)} P^s (g(x_1(\tau)) - g(x_2(\tau))\, d\tau \right| \\
&\le \sup_{t\in\mathbb{R}} e^{-\eta|t|} \int_{-\infty}^t C e^{-\beta(t-\tau)} \mathrm{Lip}\,(g) |x_1(\tau) - x_2(\tau)|\, d\tau \\
&\le C\,\gamma\,\|x_1 - x_2\|_{BC_\eta^0} \sup_{t\in\mathbb{R}} e^{-\beta t - \eta|t|} \int_{-\infty}^t e^{\beta\tau)} e^{\eta|\tau|}\, d\tau \\
&\le \tilde{C}\,\gamma\,\|x_1 - x_2\|_{BC_\eta^0}.
\end{aligned}
$$

Durch Wahl von γ kann man erreichen, dass $\tilde{C}\,\gamma < 1/6$ ist. Für den Zentrumsanteil gilt

$$
\|P^c(T(x_1) - T(x_2))\|_{BC_\eta^0} = \sup_{t\in\mathbb{R}} e^{-\eta|t|} \left| \int_0^t e^{A(t-\tau)} P^c (g(x_1(\tau)) - g(x_2(\tau))\, d\tau \right|
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sup_{t\in\mathbb{R}} e^{-\eta|t|}\int_0^t M(\varepsilon)e^{-\varepsilon|t-\tau|}\mathrm{Lip}\,(g)|x_1(\tau)-x_2(\tau)|\,d\tau \\
&\leq M(\varepsilon)\,\gamma\|x_1-x_2\|_{BC^0_\eta}\int_0^t e^{-\varepsilon|t-\tau|}e^{\eta|\tau|} \\
&\leq \tilde{M}(\varepsilon)\,\gamma\|x_1-x_2\|_{BC^0_\eta}
\end{aligned}
$$

wie im Beweis der 1. Behauptung.
Insgesamt ist dann

$$
\begin{aligned}
&\|T(x_1)-T(x_2)\|_{BC^0_\eta} \\
\leq\;& \|P^uT(x_1)-P^uT(x_2)\|_{BC^0_\eta}+\|P^sT(x_1)-P^sT(x_2)\|_{BC^0_\eta}+\|P^cT(x_1)-P^cT(x_2)\|_{BC^0_\eta} \\
\leq\;& \frac{1}{2}\|x_1-x_2\|_{BC^0_\eta}.
\end{aligned}
$$

Aus dem Banachschen Fixpunktsatz folgt nun direkt, dass T einen Fixpunkt in BC^0_η besitzt. Diesen Fixpunkt nennen wir $(x^s_*, x^c_*, x^u_*)(t)$. Aus der Konstruktion folgt sofort, dass $x^c_*(0) = x^c_0$.
Nun können wir Ψ definieren als

$$\Psi(x^c_0) := (x^s_*(0), x^u_*(0)) \in E^s \oplus E^u.$$

Ψ ist Lipschitz–stetig, denn wenn man x^c_0 als Parameter von T auffasst, so ist T natürlich Lipschitz–stetig (sogar glatt) in x^c_0. In einer Übungsaufgabe zur Dynamik I wurde gezeigt, dass dann auch der Fixpunkt beim Banachschen Fixpunktsatz Lipschitz-stetig vom Parameter (hier x^c_0) abhängt.
Graph (Ψ) ist invariant, da der Fixpunkt eindeutig ist. Betrachte dazu einen Punkt $x_0 := (x^s_0, \Psi(x^s_0)) \in$ Graph (Ψ) und eine Zeit $t_0 > 0$. Zerlege $\Phi_{t_0}(x_0) = (\tilde{x}^s, \tilde{x}^u)$. Dann bleibt der hyperbolische Anteil $(\tilde{x}^s, \tilde{x}^u)$ des Orbit für $t \in \mathbb{R}$ beschränkt. $\Psi(\tilde{x}^s)$ ist aber der *eindeutige* Punkt in E^u, so dass der hyperbolische Anteil des Orbits durch $(\tilde{x}^c, \Psi(\tilde{x}^c))$ beschränkt bleibt. Also ist $(\tilde{x}^s, \tilde{x}^u) = \Psi(\tilde{x}^c)$, und damit $\Phi_{t_0}(x_0) \in$ Graph (Ψ).

□

Lemma (Eindeutigkeit):
Die globale Zentrumsmannigfaltigkeit ist eindeutig. Genauer:
Falls $\tilde{W}^c = Graph(\tilde{\Psi})$ eine andere invariante Mannigfaltigkeit mit $\tilde{\Psi} \in BC^0(E^c, E^h)$ ist, dann ist $\tilde{\Psi} = \Psi$.

Beweis: Sei Aus der Invarianz von $\tilde{W}^c = \mathrm{Graph}(\tilde{\Psi})$ folgt sofort, dass

$$P^h\left(\Phi_t(\underbrace{x^c+\tilde{\Psi}(x^c)}_{\in\tilde{W}^c(0)})\right) = \tilde{\Psi}(P^c(\Phi_t(x^c+\tilde{\Psi}(x^c)))).$$

Insbesondere ist also

$$x^c+\tilde{\Psi}(x^c) \in W^c(0) = \mathrm{Graph}(\Psi)$$

Daher ist $\Psi = \tilde{\Psi}$. □

Die C^k-Differenzierbarkeit von g vererbt sich auf die Zentrumsmannigfaltigkeit:

Satz 8.2 (Glattheit der Zentrumsmannigfaltigkeit, ohne Beweis) *Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ wie oben. Dann existiert für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Zahl $\gamma_k > 0$, so dass $\Psi \in C^k(E^c, E^h)$ für alle $g \in BC^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ mit $\sup |Dg| < \gamma_k$.*

Ein Beweis dieses Satzes findet sich in dem erwähnten Artikel von Vanderbauwhede. Beweistechnisch wird die Sache dadurch etwas komplizierter, dass man nun gewichtete Räume Y_{η_1} und Y_{η_2} mit $0 < \eta_1 < \eta_2 < \beta$ betrachten muss.

Bemerkung:

- Im allgemeinen ist g natürlich nicht gleichmäßig beschränkt. Dann kann man immer noch g „abschneiden" und eine **lokale Zentrumsmannigfaltigkeit** konstruieren. Dies erlaubt immer noch Aussagen über Lösungen, die in dem Bereich des Phasenraums bleiben, in dem g nicht modifiziert wurde.

- Allerdings ist die so konstruierte lokale Zentrumsmannigfaltigkeit nicht mehr eindeutig, sondern hängt von der Abschneidefunktion ab. Eindeutig ist nur die Taylor-Entwicklung in $x = 0$.

- Um die Dynamik auf der Zentrumsmannigfaltigkeit zu untersuchen, projiziert man das Vektorfeld auf W^c mit Hilfe der Projektion P^c in den Zentrums-Eigenraum E^c. Dort löst man dann die *reduzierte Gleichung*

$$\dot{x}^c = P^c f(x^c + \Psi(x^c)).$$

  Die Lösungen in der Zentrumsmannigfaltigkeit erhält man dann wieder als $x = x^c + \Psi(x^c)$.

- Eine Zentrumsmannigfaltigkeit kann man genauso für Systeme

$$\dot{x} = f(x, \mu)$$

  mit Parametern konstruieren. In diesem Fall fügt man in der Regel noch triviale Gleichungen

$$\dot{\mu} = 0$$

  für die Parameter μ hinzu und erhält somit einen höherdimensionalen Zentrums-Eigenraum.

- Wie oben erwähnt, kann man zeigen, dass für $g \in C^k$ auch die Zentrumsmannigfaltigkeit C^k ist, also $\Psi \in C^k$. Allerdings gilt diese Aussage nur für $k < \infty$! Es gibt C^∞–Vektorfelder mit Gleichgewichten, die keine C^∞–Zentrumsmannigfaltigkeit besitzen ($\rightsquigarrow$ Vanderbauwhede). Technisch sieht man das daran, dass dann $\gamma_k \to 0$ strebt für $k \to \infty$.

  Wenn man eine lokale Zentrumsmannigfaltigkeit konstruieren will, muss man daher in einer immer kleineren Umgebung abschneiden.

- Man kann das Spektrum auch an anderen Stellen teilen. Das führt zum Beispiel zur **zentrums–stabilen** Mannigfaltigkeit W^{cs} oder **zentrums–instabilen** Mannigfaltigkeit W^{cu}.

8.2 Beispiel:

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2 y - x^5 \\ \dot{y} &= -y + x^2 \end{aligned}$$

in der Nähe der Ruhelage $x = y = 0$. Die Linearisierung ist

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und besitzt die Eigenwerte 0 und -1. Nach Satz 8.1 existiert lokal eine Zentrumsmannigfaltigkeit, die tangential an den Eigenraum $\{y = 0\}$ zum Eigenwert $\lambda = 0$ ist. Selbst wenn wir das nicht wissen, können wir einfach eine invariante Mannigfaltigkeit als Graph $y = h(x)$ einer Funktion

$$h(x) = ax + bx^2 + cx^3 + \mathcal{O}(x^4)$$

suchen. Dazu berechnen wir $\dot{y}$ auf zwei Arten: zunächst ist wegen $y = h(x)$

$$\begin{aligned} \dot{y} &= h'(x)\dot{x} \\ &= (a + 2bx + 3cx^2 + \mathcal{O}(x^3))(x^2 h(x) - x^5) \\ &= (a + 2bx + 3cx^2 + \mathcal{O}(x^3))\left(ax^3 + bx^4 + (c-1)x^5\right) \\ &= a^2x^3 + 3abx^4 + \mathcal{O}(x^5) \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -h(x) + x^2 \\ &= -ax + (1-b)x^2 - cx^3 + \mathcal{O}(x^4) \end{aligned}$$

Vergleicht man die beiden Ausdrücke, kommt man auf die Bedingungen $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$. Die Zentrumsmannigfaltigkeit hat also die Form

$$y = x^2 + \mathcal{O}(x^4)$$

und die Dynamik auf W^c ist gegeben durch Einsetzen dieser Approximation in die Differentialgleichung für x:

$$\dot{x} = x^4 - x^5 + \mathcal{O}(x^6).$$

Insbesondere sieht man, dass die Ruhelage $x = y = 0$ instabil ist.
Hätte man die ursprüngliche Differentialgleichung einfach auf den Zentrumseigenraum $\{y = 0\}$ eingeschränkt, wäre man zu einem anderen (falschen !) Ergebnis gelangt.

Bemerkung: Auf diese Weise kann man ganz allgemein die Taylor-Entwicklung von Ψ aus der Taylor-Entwicklung von g sukzessive berechnen, siehe z.B. [Iooss & Adelmeyer: *Topics in Bifurcation Theory and Applications*, S. 8–10]

8.3 Zentrumsmannigfaltigkeiten für Diffeomorphismen

Wir formulieren nur den Satz über die Existenz von globalen bzw. lokalen Zentrumsmannigfaltigkeiten für Diffeomorphismen mit nicht-hyperbolischen Fixpunkten. Die Beweise können analog zu den Beweisen im kontinuierlichen Fall geführt werden.
Details $\rightsquigarrow$ Übungen

Satz 8.3 (Zentrumsmannigfaltigkeit für Diffeomorphismen)
Betrachte Diffeomorphismen der Form

$$x_{n+1} = Ax_n + g(x_n), \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

mit $g \in BC^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ *und* $g(0) = Dg(0) = 0$.
Zerlege das Spektrum $\sigma(A)$ *in die drei Teile* $\sigma^s := \sigma(A) \cap \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$, $\sigma^c := \sigma(A) \cap \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\}$ *und* $\sigma^u := \sigma(A) \cap \{z \in \mathbb{C};\ |z| > 1\}$.
Seien E^s, E^c *und* E^u *die entsprechenden (verallgemeinerten) Eigenräume von* A. *Wir schreiben auch* $E^h := E^s \oplus E^u$ *für den hyperbolischen Teil von* A *und* $P^h : \mathbb{R}^n \to E^s \oplus E^u$ *für die kanonische Projektion.*
Dann existiert zu jeder gegebenen Matrix A *ein* $\gamma > 0$, *so dass für alle Nichtlinearitäten* $g \in BC^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ *mit Lipschitz-Konstante* $Lip(g) < \gamma$ *gilt:*
Die Menge

$$W^c(0) := \{x_0 \in \mathbb{R}^n;\ \sup_{n\in\mathbb{Z}} |P^h F^n(x_0)| < \infty\}$$

ist (positiv und negativ) invariant.
$W^c(0)$ *ist ein Graph über dem Zentrums–Eigenraum* E^c:

$$W^c(0) = \mathrm{graph}(\Psi) = \{(x^c, x^h) \in E^c \times E^h;\ x^h = \Psi(x^c)\}$$

mit einer Lipschitz-stetigen Funktion $\Psi : E^c \to E^h$.
Damit ist $W^c(0)$ *eine Mannigfaltigkeit und hat dieselbe Dimension wie* E^c *und heißt* **globale Zentrumsmannigfaltigkeit**.

8.4 Normalformen

Um die reduzierte Differentialgleichung auf der Zentrumsmannigfaltigkeit zu untersuchen, bedient man sich oft sogenannter Normalformen.
Für eine gewöhnliche Differentialgleichung der Form

$$\dot{x} = f(x), \quad f \in C^k(\mathbb{R}^n) \tag{3}$$

mit $f(0) = 0$ entwickelt man f in eine Taylorreihe und versucht, durch Koordinatentransformationen möglichst viele Terme wegzutransformieren. Dabei kann man entweder mit einer polynomialen Transformation eine Normalform „endlicher Ordnung“ + ein Restglied polynomialer Ordnung erhalten, oder durch einen Grenzübergang eine Normalform „unendlicher Ordnung“ mit einem Restglied, das kleiner ist als jede polynomiale Ordnung, beispielsweise von der Form $\mathcal{O}(e^{-1/|x|})$.
Sei

$$A := Df(0).$$

Wir suchen eine Klasse $NF_k(A)$ von Vektorfeldern, so dass sich die Gleichung (3) auf die Gestalt

$$\dot{y} = g(y)$$

mit $g \in NF_k(A)$ bringen läßt.
Satz 8.4 über Normalformen wird uns eine Charakterisierung der Elemente von $NF_k(A)$ durch ihre Taylor-Entwicklung bis zur Ordnung k im Ursprung liefern.
Wir beginnen mit einigen Definitionen und Vorüberlegungen. Sei dazu $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ein Diffeomorphismus. Mit

$$x = \Phi(y)$$

ergibt sich dann aus der Kettenregel

$$\dot{x} = f(\Phi(y)) = D\Phi(y) \cdot \dot{y}$$

so dass unsere Gleichung (3) in den neuen Koordinaten die Form

$$\dot{y} = (D\Phi(y))^{-1} \cdot f(\Phi(y)), \quad y \in \mathbb{R}^n$$

lautet.
Da wir Normalformen hauptsächlich über ihre Taylor-Entwicklungen charakterisieren wollen, führen wir die folgende Notation ein.

Definition: Für $g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ und $0 \leq m \leq k$ sei

$$T_m g(x) := \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha g(0) \cdot x^\alpha$$

das Taylor–Polynom von g in 0 bis zur Ordnung m und

$$\tilde{T}_m g(x) := \sum_{|\alpha| = m} \frac{1}{m!} D^\alpha g(0) \cdot x^\alpha$$

der homogene Anteil vom Grad m.

Hierbei ist $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ ein Multiindex, d.h. es bedeutet wie üblich

$$\begin{aligned} |\alpha| &= \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n, \\ \alpha! &= (\alpha_1!)(\alpha_2!)\ldots(\alpha_n!) \quad \text{und} \\ x^\alpha &= x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}. \end{aligned}$$

Sei weiter $H_m(\mathbb{R}^n)$ der Raum aller Abbildungen $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, so dass h_i ein homogenes Polynom vom Grad m in $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ist für $i = 1, 2, \ldots, n$.
Bemerkung: Für jedes $g \in C^m(\mathbb{R}^n)$ ist $\tilde{T}_m g \in H_m(\mathbb{R}^n)$ ein homogenes Polynom vom Grad m.

Definition: Für zwei Abbildungen $\phi, \psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ definieren wir die **Lie-Ableitung** $L_\psi \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ von ϕ in Richtung ψ als

$$\begin{aligned} L_\psi \phi(x) &:= D\phi(x) \cdot \psi(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \phi(Id + t \cdot \psi(x)). \end{aligned}$$

Die **Lie-Klammer** von ϕ und ψ ist die bilineare Abbildung

$$[\phi, \psi] := L_\psi \phi - L_\phi \psi.$$

Für eine $n \times n$-Matrix A sei die **adjungierte Darstellung**

$$\mathrm{ad}\, A : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

gegeben durch

$$\mathrm{ad}\, A \cdot \phi := [A, \phi] \qquad \forall \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

beziehungsweise ausführlicher

$$(\mathrm{ad}\, A \cdot \phi)(x) = [A, \phi] = L_\phi A - L_A \phi = A\phi(x) - D\phi(x) \cdot Ax \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Bemerkung: $\mathrm{ad}_m\, A := \mathrm{ad}\, A|_{H_m} : H_m \to H_m$ bildet den Raum H_m in sich ab, denn für $\phi \in H_m$ ist

$$(\mathrm{ad}\, A \cdot \phi)(x) = \underbrace{A\phi(x)}_{\text{homogen Grad } m} - \underbrace{D\phi(x)}_{\text{hom. Grad } m-1} \cdot \underbrace{Ax}_{\text{hom. Grad } 1}.$$

Bevor wir den Satz über Normalformen formulieren können, zeigen wir noch zwei vorbereitende Lemmata.

Lemma: *Sei* $f \in C^k$ *für ein* $k \geq 2$, $f(0) = 0$, $Df(0) = A$ *und* $\Phi \in C^\infty$ *mit* $\Phi(0) = 0$, $D\Phi(0) = \mathrm{Id}$
Sei $g := D\Phi^{-1} \cdot (f \circ \Phi)$.
Dann ist $g \in C^k$ *mit* $g(0) = 0$, $Dg(0) = A$ *und*

$$\begin{aligned} \tilde{T}_m g &= \mathrm{ad}_m\, A \cdot \tilde{T}_m \Phi + \tilde{T}_m[(T_m f - A) \circ T_{m-1}\Phi - L_{(T_{m-1}g - A)}(T_{m-1}\Phi - \mathrm{Id})] \\ &=: \mathrm{ad}_m\, A \cdot \tilde{T}_m \Phi + R_m \end{aligned}$$

für alle $2 \leq m \leq k$. *Insbesondere läßt sich* $\tilde{T}_m g$ *daher aus* $T_m f$, $T_m \Phi$ *und* $T_{m-1} g$ *berechnen.*

Beweis: Es ist

$$D\Phi(x) \cdot g(x) = f(\Phi(x)),$$

das heißt, speziell für $x = 0$ ergibt sich sofort $g(0) = 0$. Differenziert man diese Gleichung einmal, erhält man

$$D^2\Phi(x)(g(x), g(x)) + D\Phi(x)Dg(x) = Df(\Phi(x))D\Phi(x) \tag{4}$$

und wieder mit $x = 0$ erhält man $Dg(0) = 0$, also $g \in C_1^\infty(A)$. Wegen

$$L_g \Phi = D\Phi \circ g = f \circ \Phi$$

ist

$$
\begin{aligned}
g &= f \circ \Phi - L_g(\Phi - \mathrm{Id}) \\
&= A\Phi + (f - A) \circ \Phi - L_{g-A}(\Phi - \mathrm{Id}) - L_A(\Phi - \mathrm{Id}) \\
&= (\mathrm{ad}\, A)\Phi + (f - A) \circ \Phi - L_{g-A}(\Phi - \mathrm{Id}) + L_A\Phi \\
\Rightarrow \tilde{T}_m g &= \underbrace{\tilde{T}_m(\mathrm{ad}_m A)\Phi}_{=(\mathrm{ad}_m A)\tilde{T}_m \Phi} + \underbrace{\tilde{T}_m L_A \,\mathrm{Id}}_{=0} + \tilde{T}_m[(f - A) \circ \Phi - L_{g-A}(\Phi - \mathrm{Id})].
\end{aligned}
$$

Dabei benutzt man im letzten Schritt die Identität $T_1(f - A) = T_1(g - A) = 0$.
Weiter ist

$$\tilde{T}_m((f - A) \circ \Phi) = \tilde{T}_m((T_m f - A) \circ T_{m-1}\Phi),$$

da $T_m f - A$ nach Voraussetzung mit quadratischen Termen beginnt. □

Der Anteil von $\tilde{T}_m g$, der im Bild von H_m unter $\mathrm{ad}_m A$ liegt, kann also durch eine geeignete Wahl von $\tilde{T}_m\Phi$ wegtransformiert werden. Man kann sich daher Schritt für Schritt die Glieder der Taylor-Reihe von Φ und von g besorgen. Das folgende Lemma von Borel zeigt, dass zu einer solchen Folge $\tilde{T}_m\Phi$ von Taylorgliedern auch wirklich ein Diffeomorphismus gehört, der diese Taylor-Entwicklung hat.

Lemma: [Borel]
Sei $(\phi_m)_{m\geq 2}$ eine Folge von Abbildungen in $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\phi_m \in H_m(\mathbb{R}^n)$. Dann existiert ein Diffeomorphismus $\Phi \in C^\infty$ mit $D\Phi(0) = \mathrm{Id}$ so dass

$$\tilde{T}_m\Phi = \phi_m \qquad \forall m \geq 2.$$

Beweis: Sei χ eine C^∞-Abschneidefunktion mit $\chi(x) = 1$ für $|x| \leq 1$ und $\chi(x) = 0$ für $|x| \geq 2$. Dann hat $\hat{\phi}_k(x) := \phi_k(x)\chi(x)$ kompakten Träger und es ist

$$M_k := \sup_{x\in\mathbb{R}^n, 0\leq m\leq k} \|D^m\hat{\phi}_k(x)\| < \infty.$$

Mit $\rho_k := \min(1, 2^{-k}M_k^{-1})$ definieren wir nun Funktionen Funktion

$$\psi_k(x) := \phi_k(x)\chi\left(\frac{x}{\rho_k}\right).$$

Für festes $m \geq 0$ und alle $k > m$, $k \geq 2$ gilt dann

$$\|D^m\psi_k(x)\| \leq \rho_k^{k-m}M_k \leq \rho_k M_k \leq 2^{-k}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Daher konvergiert die Reihe

$$\psi^{(m)}(x) := \sum_{k=2}^{\infty} D^m\psi_k(x)$$

für jedes $m \in \mathbb{N}$ gleichmäßig in $x \in \mathbb{R}^n$. Daraus folgt, dass $\psi := \psi^{(0)}$ eine C^∞-Funktion ist mit $D^m\psi(x) = \psi^{(m)}(x)$. Insbesondere ist dann $\psi(0) = 0$, $D\psi(0) = 0$ und

$$D^m\psi(x)(0) = \psi^{(m)}(0) = \sum_{k=2}^{\infty} D^m\psi_k(0) = \sum_{k=2}^{\infty} D^m\phi_k(0) = D^m\phi_m(0)$$

für alle $m \geq 2$.
Außerdem ist für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|D\psi(x)\| \leq \sum_{k=2}^{\infty} 2^{-k} = \frac{1}{2}.$$

Also ist $\Phi := Id + \psi$ ein C^∞-Diffeomorphismus mit den gewünschten Eigenschaften. □

8.4.1 Der Satz über Normalformen

Nun sind wir in der Lage den folgenden grundlegenden Satz zu beweisen:

Satz 8.4 (Satz über Normalformen) *Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ und für jedes $m \geq 2$ sei W_m ein Unterraum von $H_m(\mathbb{R}^n)$ mit*

$$H_m(\mathbb{R}^n) = \mathcal{R}(\mathrm{ad}_m\, A) \oplus W_m.$$

Sei $k \geq 2$. Dann existiert für jedes $f \in C^k$ mit $Df(0) = A$ ein C^k–Diffeomorphismus Φ mit $D\Phi(0) = \mathrm{Id}$ so dass für die transformierte Differentialgleichung

$$\dot{y} = g(y)$$

mit $x = \Phi(y)$ gilt:

$$\tilde{T}_m g \in W_m, \qquad 2 \leq m \leq k.$$

Beweis: Wir können sukzessive $\phi_m \in H_m(\mathbb{R}^n)$ wählen, so dass mit $\Phi_m = Id + \sum_{l=2}^{m} \phi_m$ gilt:

$$\tilde{T}_m g = (\mathrm{ad}_m\, A)\phi_m + R_m \in W_m.$$

(Die ϕ_m sind dabei nicht eindeutig bestimmt, wir könnten noch beliebige Elemente aus dem Kern von $\mathrm{ad}_m A$ addieren.) Nach Lemma 8.4 definiert die Folge der ϕ_m dann einen Diffeomorphismus $\Phi \in C_1^\infty(\mathrm{Id})$ mit $\tilde{T}_m\Phi = \phi_m$. □

Bemerkungen:

1. Die Klasse von Vektorfeldern

   $$NF_k(A) := \{g \in C^k;\ Dg(0) = A \text{ und } \tilde{T}_m g \in W_m \text{ für alle } 2 \leq m \leq k\}$$

   ist also eine vernünftige Auswahl an Normalformen. Der Beweis hat auch gezeigt, dass es unmöglich ist, diejenigen Terme, die zu W_m gehören, durch eine polynomiale Koordinatentransformation zu beseitigen. In diesem Sinne ist unsere Klasse $NF_k(A)$ „minimal“. Allerdings hängt $NF_k(A)$ noch von der Wahl der W_m ab, über die wir bisher nichts gesagt haben. Die Hoffnung ist natürlich, dass wir durch eine günstige Wahl der Komplemente W_m erreichen können, dass $\dim W_m << \dim H_m$ ist, dass also nur wenige „resonante“ Terme in der Normalform stehenbleiben.

2. Analoge Versionen für den Fall $f \in C^\infty$ bzw. den Fall, dass f noch von einem Parameter abhängt, existieren ebenfalls und werden ähnlich bewiesen.

Bisher haben wir uns noch nicht über die konkrete Wahl der Räume W_m geäußert. In einem Artikel von [*Elphick et al.: A simple global characterization for normal forms of singular vector fields (1987)*] wurde gezeigt, dass es immer möglich ist, als Komplement zu den $\mathcal{R}(\mathrm{ad}_m A)$ die Räume

$$W_m := \mathcal{N}(\mathrm{ad}_m A^T)$$

zu wählen, wobei A^T die Transponierte von A ist, das heißt

$$(A^T x, y) = (x, Ay) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Diese Behauptung und die sich daraus ergebenden Konsequenzen wollen wir im folgenden Abschnitt behandeln. Wir beginnen wieder mit einem nützlichen Lemma:

Lemma: *Sei A wieder eine $n \times n$-Matrix und $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Definiert man dann für jedes $t \in \mathbb{R}$ eine Abbildung $h_t \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ durch*

$$h_t(x) := e^{-At} h(e^{At} x)$$

so gilt:

(i) $(\mathrm{ad}\, A) \cdot h_t(x) = ((\mathrm{ad}\, A) \cdot h)_t(x) = -\frac{d}{dt} h_t(x)$

(ii) $\mathcal{N}(\mathrm{ad}\, A) = \{h \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid h_t = h \ \forall t \in \mathbb{R}\}$.

Beweis:

(i) Da A mit $e^{\pm At}$ vertauscht, berechnet man leicht

$$\begin{aligned}(\mathrm{ad}\, A) \cdot h_t(x) &= A e^{-At} h(e^{At} x) - e^{-At} h'(e^{At} x) e^{At} A x \\ &= ((\mathrm{ad}\, A) \cdot h)_t(x) = -\frac{d}{dt} h_t(x).\end{aligned}$$

(ii) Für $h \in \mathcal{N}(\mathrm{ad}\, A)$ folgt aus (i) sofort, dass $h_t = h$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Umgekehrt zeigt die Relation $h_t = h$, dass $\frac{d}{dt} h_t(x) = 0$ in $t = 0$ und damit $h \in \mathcal{N}(\mathrm{ad}\, A)$.

□

Nun sind wir in der Lage, die folgende Aussage zu beweisen.

Satz 8.5

$$\mathcal{N}(\mathrm{ad}_m\, A^T) \oplus \mathcal{R}(\mathrm{ad}_m\, A) = H_m(\mathbb{R}^n)$$

Beweis: Wir werden in Kürze ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $H_m(\mathbb{R}^n)$ konstruieren, für das die Identität

$$\langle (\mathrm{ad}_m\, A^T) \cdot g, h \rangle = \langle g, (\mathrm{ad}_m\, A) \cdot h \rangle \tag{5}$$

gilt. Dann ist für dieses Skalarprodukt

$$\begin{aligned}(\mathcal{R}(\mathrm{ad}_m\, A))^\perp &= \mathcal{N}((\mathrm{ad}_m\, A)^T)\\ &= \mathcal{N}(\mathrm{ad}_m\, A^T) = W_m,\end{aligned}$$

wobei die erste Identität ganz allgemein gilt [1], und die zweite aus (5) folgt. Wir definieren nun ein Skalarprodukt und zeigen anschließend, dass es genau die gewünschte Eigenschaft hat. Es genügt, wenn wir das Skalarprodukt von zwei Monomen festlegen und es dann linear auf alle Polynome fortsetzen. Sei also

$$\langle a_\sigma x^\sigma, b_{\sigma'} x^{\sigma'}\rangle := \delta_{\sigma,\sigma'}\sigma!(a_\sigma, b_{\sigma'})$$

wobei σ und σ' wieder Multiindizes sind und $\delta_{\sigma,\sigma'}$ das Kronecker-δ.

Lemma: *Um (5) zu beweisen, genügt es zu zeigen, dass für jede $n \times n$-Matrix B gilt:*

$$\langle g, h \circ B\rangle = \langle g \circ B^T, h\rangle \qquad \forall g, h \in H_m(\mathbb{R}^n) \tag{6}$$

Beweis: Mit Hilfe von (6) speziell für die Matrix $B := e^{At}$ erhält man zunächst

$$B^T = \left(e^{At}\right)^T = \left(\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} A^k t^k\right)^T = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!}(A^T)^k t^k = e^{A^T t}$$

und damit

$$\langle g, e^{-At} \circ h \circ e^{At}\rangle = \langle e^{-A^T t} \circ g \circ e^{A^T t}, h\rangle.$$

Differenziert man diesen Ausdruck nach t ergibt sich die Gleichung

$$\begin{aligned}&\langle g', e^{-At} \circ h \circ e^{At}\rangle + \langle g, e^{-At} A \circ h \circ e^{At} + (e^{-At} \circ h' \circ e^{At})A\rangle\\ =\ &\langle e^{-A^T t} \circ g \circ e^{A^T t}, h'\rangle + \langle -e^{-A^T t} A^T \circ g \circ e^{A^T t} + e^{-A^T t} \circ (g \circ e^{A^T t})A^T, h\rangle\end{aligned}$$

aus der (5) sofort folgt, indem man bei $t = 0$ auswertet. □

Es bleibt noch, die Gleichung (6) zu verifizieren. Dazu stellen wir zunächst fest, dass sich das Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ noch auf eine andere Art bescheiben läßt. Es ist nämlich

$$\langle g, h\rangle = (g(\partial_x)\ h(x))|_{x=0}\,,$$

wobei $\partial_x = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \ldots, \partial_{x_n})$ ist. In dieser Schreibweise bedeutet (6) nichts anderes als

$$(g(\partial_x)(h \circ B))(0) = ((g \circ B^T)(\partial_x)h)(0). \tag{7}$$

Nun betrachten wir den linearen Koordinatenwechsel $x = B^T y$.

$$\frac{\partial}{\partial y_j} = \sum_{i=1}^n b_{ji} \frac{\partial}{\partial x_i} \Rightarrow B\partial_x = \partial_y.$$

[1] $g \in \mathcal{R}(\mathrm{ad}_m\, A))^\perp \Leftrightarrow \langle g, (\mathrm{ad}_m\, A) \cdot h\rangle = 0\ \forall h \Leftrightarrow \langle (\mathrm{ad}_m\, A)^T g, h\rangle = 0\ \forall h \Leftrightarrow g \in \mathcal{N}((\mathrm{ad}_m\, A)^T)$

Nun gilt

$$\begin{aligned}\langle g\circ B, h\rangle = \sum_{j=1}^{n}\langle g_j\circ B, h_j\rangle &= \sum_{j=1}^{n} g_j(B\partial_x), h_j(x)\big|_{x=0}\\ &= \sum_{j=1}^{n} g_j(\partial_y), h_j(B^T y)\big|_{y=0}\\ &= \sum_{j=1}^{n}\langle g_j, h_j\circ B^T\rangle = \langle g, h\circ B^T\rangle,\end{aligned}$$

das heißt, wir haben (7) gezeigt. □

Insgesamt haben wir damit den folgenden Satz bewiesen.

Satz 8.6 (Normalform eines gegebenen Vektorfelds)
Sei A eine $n\times n$-Matrix und $f\in C^k$ mit $Df(0)=A$. Dann existiert ein lokaler C^∞–Diffeomorphismus Φ, so dass $\Phi^* f = g$ ist, wobei $g\in C^k$ ist mit $Dg(0)=A$ und

$$T_k g\circ e^{A^T t} = e^{A^T t}\circ T_k g \qquad \forall t\in\mathbb{R}.$$

Also reduziert sich die Suche nach der Normalform von f auf die Frage, welche polynomialen Abbildungen mit der Gruppe

$$\Gamma := \{e^{A^T t}\mid t\in\mathbb{R}\}\subseteq GL(n,\mathbb{R})$$

kommutieren.

Bemerkung: Die Restterme von höherer Ordnung als k, die noch in g enthalten sind, können in manchen Fällen wegtransformiert werden, das ist aber wesentlich schwieriger. Einfacher ist es oft zu zeigen, dass diese zusätzlichen Terme die Dynamik nicht ändern.

Bei konkreten Rechnungen erweist sich manchmal eine alternative Charakterisierung der Normalformen als nützlich .

Lemma 8.7 *Sei P ein Polynom. Dann ist*

$$P(e^{A^T t}x) = e^{A^T t}P(x) \qquad \forall x, t \tag{8}$$

äquivalent zu

$$DP(x)A^T x = A^T P(x) \qquad \forall x. \tag{9}$$

Beweis: Wir nehmen zuerst an, dass (8) erfüllt ist. Differenziert man diesen Ausdruck nach t, erhält man

$$\frac{d}{dt}\Big(P(e^{A^T t}x) - e^{A^T t}P(x)\Big) = DP(e^{A^T t}x)A^T e^{A^T t}x - A^T e^{A^T t}P(x) = 0$$

und durch Einsetzen von $t=0$ erhält man (9). Falls umgekehrt (4) gilt,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big(e^{-A^T t}P(e^{A^T t}x)\Big) &= -A^T e^{-A^T t}P(e^{A^T t}x) + e^{-A^T t}DP(e^{A^T t}x)A^T e^{A^T t}x\\ &= e^{-A^T t}\Big(DP(e^{A^T t}x)A^T e^{A^T t}x - A^T P(e^{A^T t}x)\Big) = 0\end{aligned}$$

für alle x, t. Insbesondere ist für festes x der Ausdruck $e^{-A^T t}P(e^{A^T t}x)$ nicht von t abhängig. Wegen $\left(e^{-A^T t}P(e^{A^T t}x)\right)\Big|_{t=0} = P(x)$ gilt damit $P(e^{A^T t}x) = e^{A^T t}P(x)$ für alle x und t. $\square$

Beispiele:

1. $A =$ **Diagonalmatrix**

   Falls
$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$
   eine Diagonalmatrix ist, dann läßt sich $\mathrm{ad}_m\, A$ explizit berechnen und ist ebenfalls diagonal. Dazu betrachten wir eine Basis von $H_m(\mathbb{R}^n)$, nämlich
$$\{x^\sigma e_j \mid \sigma \in \mathbb{N}^n,\ |\sigma| = m,\ 1 \le j \le n\}$$
   Wir berechnen für ein Element dieser Basis
$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_m\, A(x^\sigma e_j) &= x^\sigma A e_j - \sum_i \underbrace{\frac{\sigma_i}{x_i} x^\sigma}_{=\frac{\partial}{\partial x_i}x^\sigma} \underbrace{(Ax)_i}_{=\lambda_i x_i} e_j \\ &= (\lambda_j - \sum_i \sigma_i \lambda_i) x^\sigma e_j, \end{aligned}$$
   also sind alle unsere Basisvektoren Eigenvektoren von $\mathrm{ad}_m\, A$ mit Eigenwerten $\lambda_j - \sum_i \sigma_i \lambda_i$. Falls alle diese Eigenwerte von 0 verschieden sind, das heißt, wenn keine *Resonanzen* auftreten, dann ist $\mathrm{ad}_m\, A$ bijektiv für beliebiges m. Nach dem Satz über Normalformen existiert dann eine Koordinatentransformation $\Phi \in C^\infty$, so dass in der transformierten Gleichung
$$\dot{y} = Ay + \tilde{g}(y)$$
   alle Ableitungen von $\tilde{g}$ in $y = 0$ verschwinden. Sternberg hat bewiesen, dass man sogar ein Φ finden kann, so dass lokal in einer Umgebung von $y = 0$ dieser Rest völlig wegtransformiert wird, also $\tilde{g} \equiv 0$.

2. **Jordan-Block**

   Betrachte als nächstes den Fall, dass
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   ein Jordan-Block zum Eigenwert 0 ist. Sei eine Differentialgleichung
$$\dot{x} = f(x)$$
   mit $f(0) = 0$ und $Df(0) = A$ gegeben. Sei weiter $P(x_1, x_2) = (P_1(x_1, x_2), P_2(x_1, x_2))$ das Taylor-Polynom $T_k g$ der Normalform g.

Nach Lemma 8.7 erfüllt P dann die Gleichung $DP(x)A^Tx = A^TP(x)$, bzw. ausführlicher

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial x_1} & \frac{\partial P_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial P_2}{\partial x_1} & \frac{\partial P_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1(x_1, x_2) \\ P_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

Daraus erhält man sofort die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 \frac{\partial P_1}{\partial x_2} &= 0 \\ x_1 \frac{\partial P_2}{\partial x_2} &= P_1 \end{aligned}$$

Insbesondere hängt damit P_1 nicht von x_2 ab, d.h. $P_1(x_1, x_2) = p_1(x_1)$, wobei p_1 wieder ein Polynom ist. Setzt man dies in die zweite Gleichung ein, so folgt

$$\frac{\partial P_2}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{p_1(x_1)}{x_1}.$$

Da auf der linken Seite ein Polynom steht, muss auch die rechte Seite polynomial sein, daher muss p_1 von der Form $p_1(x_1) = x_1 q_1(x_1)$ sein. Dann lässt sich P_2 leicht durch Integration bestimmen:

$$P_2(x_1, x_2) = q_1(x_1)x_2 + q_2(x_1).$$

Setzt man alles ein und behält nur die ersten Terme bis zur 2. Ordnung, kommt man auf diese Weise zur Normalform

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + ax_1^2 + \mathcal{O}(x_1^3) \\ \dot{x}_2 &= ax_1x_2 + bx_1^2 + \mathcal{O}(x_1^3 + x_1^2x_2) \end{aligned}$$

wobei a und b Parameter sind, die sich aus der vorgegebenen Nichtlinearität f ermitteln lassen.

Hier kann man übrigens durch eine andere Wahl der Komplemente auch andere Normalformen erreichen. Takens hat 1974 die Normalform

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + ax_1^2 + \mathcal{O}(x_1^3) \\ \dot{x}_2 &= bx_1^2 + \mathcal{O}(x_1^3 + x_1^2x_2) \end{aligned}$$

hergeleitet. Sie spielt eine wichtige Rolle bei der Untersuchung der *Takens-Bogdanov-Verzweigung*.