

9 Lokale Verzweigungen

Definition: Betrachte ein kontinuierliches oder diskretes dynamisches System, das von einem Parameter $\lambda \in \mathbb{R}^p$ abhängt. Ein Punkt λ_0 heißt **Verzweigungspunkt** (Bifurkationspunkt), falls es in jeder Umgebung von λ_0 andere Punkte gibt, so dass das dynamische System dort nicht topologisch konjugiert ist zu dem System für $\lambda = \lambda_0$.

Bemerkung: Wir werden uns in den nächsten Kapiteln immer mit der Situation beschäftigen, dass sich eine Umgebung von λ_0 in endlich viele Bereiche einteilen lässt, in denen das System dann strukturell stabil ist. Damit beschäftigt sich die Verzweigungstheorie. Eine solche Einteilung des Parameterraums in Bereiche mit gleichem Verhalten, stellt man oft als **Verzweigungsdiagramm** dar.

Es gibt aber auch Situationen, in denen in einer Umgebung von λ_0 unendlich viele topologische Typen vorkommen.

9.1 Verzweigung von stationären Lösungen in kontinuierlichen Systemen

9.1.1 Saddle–Node–Verzweigung

Wir wollen untersuchen, was *typischerweise* passiert, wenn ein Gleichgewicht eine Linearisierung mit einem (algebraisch und geometrisch) einfachen Eigenwert 0 besitzt.

Betrachte dazu eine Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x, \lambda), \quad x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$$

die von einem Parameter λ abhängt. Weiter sei $f \in C^2$ mit $f(0, 0) = 0$ und die Linearisierung besitze einen einfachen Eigenwert 0. Durch Wahl der Koordinaten kann man dann erreichen, dass

$$D_x f(0, 0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

mit einer Matrix B , deren Eigenwerte alle von 0 verschieden sind.

Entsprechend zerlegt man $x = (y, z)^T$ mit $y \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{R}^{n-1}$, und setzt

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = D_\lambda f(0, 0).$$

Indem man z durch $\tilde{z} - \lambda B^{-1}\beta$ ersetzt, kann man erreichen, dass $\beta = 0$ ist.

Damit hat man die Gleichung in die folgende Form gebracht:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \alpha\lambda + g_1(y, z, \lambda) \\ \dot{\lambda} &= 0 \\ \dot{z} &= +Bz + g_2(y, z, \lambda) \end{aligned}$$

mit

$$g_1, g_2 = \mathcal{O}((|y| + |z| + |\lambda|)^2)$$

Die Linearisierung besitzt in $x = \lambda = 0$ einen doppelten Eigenwert 0. Lokal existiert also eine zweidimensionale Zentrumsmannigfaltigkeit

$$W^c(0) = \{(y, \lambda, z); z = \phi(y, \lambda), (y, \lambda) \in U\}.$$

Dabei ist U eine Umgebung von 0 im \mathbb{R}^2 . Die Zentrumsmannigfaltigkeit enthält insbesondere alle kleinen beschränkten Lösungen der ursprünglichen Gleichung, also Gleichgewichte, kleine periodische Orbits, etc.

Ausserdem sind wegen $\dot{\lambda} = 0$ die Mengen $W^c(0) \cap \{\lambda = \text{const.}\}$ invariant.

Auf $W^c(0) \cap \{\lambda = \text{const.}\}$ erhält man die reduzierte Gleichung

$$\dot{y} = h(y, \lambda), \quad y \in \mathbb{R}(!)$$

mit $h(0, 0) = 0$, $h_y(0, 0) = 0$ und $h_\lambda(0, 0) = \alpha$.

Wir suchen nun Gleichgewichte, d.h. wir lösen $h(y, \lambda) = 0$. Um den Satz über implizite Funktionen anwenden zu können brauchen wir noch zwei Transversalitätsbedingungen:

$$\begin{aligned} \gamma &:= h_{yy}(0, 0) \neq 0 \\ \alpha &= h_\lambda(0, 0) \neq 0 \end{aligned}$$

Dann existiert eine Kurve $\lambda = \lambda_*(y)$ von Gleichgewichten mit $\lambda_*(0) = 0$ und $\lambda'_*(0) = 0$. Um die Stabilität dieser Gleichgewichte zu bestimmen, berechnen wir noch den Eigenwert $h_y(y, \lambda_*(y))$ der Linearisierung.

Es ist

$$\left. \frac{\partial}{\partial y} h_y(y, \lambda_*(y)) \right|_{y=0} = h_{yy}(0, 0) + h_{y\lambda}(0, 0) \cdot \underbrace{\lambda'_*(0)}_{=0} = \gamma,$$

d.h. der Eigenwert geht mit nicht-verschwindender Geschwindigkeit durch 0.

Für $\gamma < 0$ gilt dann, dass der Eigenwert positiv ist für $y < 0$, also ist für $y < 0$ das Gleichgewicht instabil, während es für $y > 0$ stabil ist.

Zuletzt berechnen wir noch die 2. Ableitung des Lösungszweigs im Punkt $(0, 0)$:

$$\begin{aligned} h(y, \lambda_*(y)) \equiv 0 &\implies h_y(y, \lambda_*(y))h_\lambda(y, \lambda_*(y)) \cdot \lambda'_*(y) = 0 \\ &\implies h_{yy}(y, \lambda_*(y)) + 2h_{y\lambda}(y, \lambda_*(y)) \cdot \lambda'_*(y)h_\lambda(y, \lambda_*(y)) \cdot \lambda''_*(y) \\ &\implies \lambda''_*(0) = \frac{h_{yy}(0, 0)}{h_\lambda(0, 0)} = \frac{\gamma}{\alpha}. \end{aligned}$$

Indem man noch die beiden Koeffizienten α und γ in den ursprünglichen Koordinaten berechnet, erhält man das folgende Resultat:

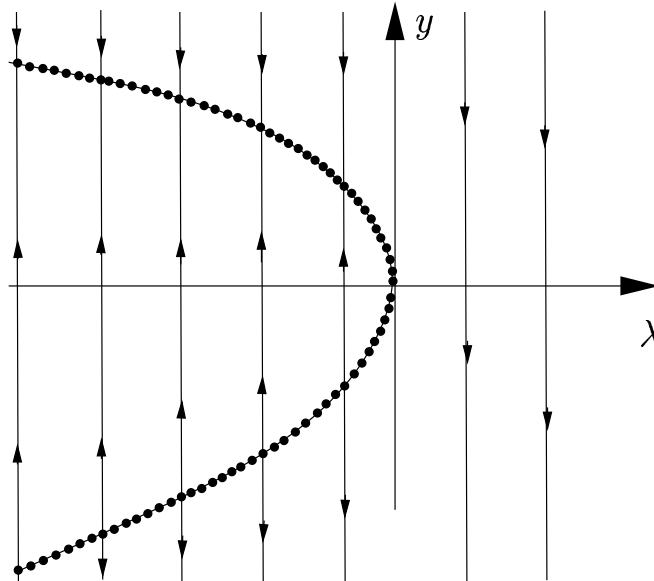
Satz 9.1 (Saddle–Node–Verzweigung im \mathbb{R}^n)

Betrachte ein System von Differentialgleichungen

$$\dot{x} = f(x, \lambda), \quad x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$$

mit $f(0, 0) = 0$.

Es gelte im Verzweigungspunkt $x = 0$, $\lambda = 0$:



(i) $D_x f(0, 0)$ besitzt einen einfachen Eigenwert 0 mit zugehörigem rechtem Eigenvektor e_r und linkem Eigenvektor e_l ,

(ii) $e_l D_\lambda f(0, 0) \neq 0$,

(iii) $e_l D_x^2 f(0, 0) \neq 0$.

Dann existiert eine glatte Kurve von Gleichgewichten in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, die durch den Punkt $(0, 0)$ verläuft und dort tangential an die Ebene $\lambda = 0$ ist.

Je nach Vorzeichen der Terme in (ii) und (iii) existieren dann entweder keine Gleichgewichte für $\lambda < 0$ und jeweils zwei Gleichgewichte für alle kleinen $\lambda > 0$ oder umgekehrt. Sei k die Anzahl der Eigenwerte von $D_x f(0, 0)$ mit negativem Realteil. Dann sind die beiden Gleichgewichte, die für festes $\lambda > 0$ bzw. $\lambda < 0$ existieren beide hyperbolisch. Eines der beiden besitzt eine k -dimensionale stabile Mannigfaltigkeit, das andere eine $(k+1)$ -dimensionale stabile Mannigfaltigkeit. Die beiden Gleichgewichte sind durch einen heteroklinen Orbit miteinander verbunden.

Bemerkung:

- Die Bedingungen (i)–(iii) bedeuten genau, dass im Gleichgewicht $x = \lambda = 0$ eine eindimensionale Zentrumsmannigfaltigkeit existiert, auf der der reduzierte Fluss die Form

$$\dot{x} = x^2 \pm \lambda + \mathcal{O}(x^3 + \lambda^2 + x\lambda)$$

hat.

- Die Menge der Vektorfelder $f(x, \lambda)$, die die Bedingungen (i)–(iii) erfüllen, ist offen und dicht im Raum der Einparameterfamilien glatter Vektorfelder mit einem Gleichgewicht $(0, 0)$, das einen Eigenwert 0 besitzt. In diesem Sinne ist die Saddle-Node-Verzweigung das typische Verhalten beim Auftreten eines Eigenwerts 0.

9.1.2 Transkritische Verzweigung

Es kann vorkommen, dass (aus physikalischen, biologischen oder völlig anderen Gründen) die Bedingungen für Saddle–Node–Verzweigungen in einem System nicht erfüllt sind. Betrachte dazu eine Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x, \lambda)$$

die einen Zweig $\{(x_*(\lambda), \lambda); \lambda \in \mathbb{R}\}$ von Gleichgewichten besitzt. Entlang dieses Zweigs kann natürlich keine Saddle–Node–Verzweigung auftreten, da für jedes λ ja mindestens eine Ruhelage existiert.

Durch eine einfache Translation kann man erreichen, dass $f(0, \lambda) \equiv 0$
Normalform der transkritischen Verzweigung:

$$\dot{x} = \lambda x - x^2$$

9.1.3 Pitchfork–Verzweigung

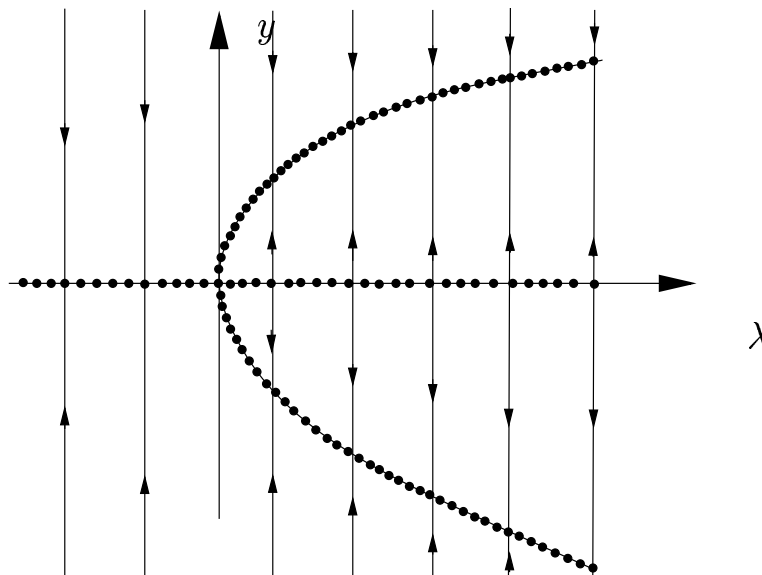
Eine Saddle–Node–Verzweigung kann auch nicht auftreten, wenn ein dynamisches System bestimmte Symmetrien aufweist. Das wichtigste Beispiel hierzu ist die Spiegelsymmetrie. Betrachte hierzu eine Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x, \lambda), \quad x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$$

mit $f \in C^3$ und der Symmetrie $f(-x, \lambda) = -f(x, \lambda)$. Daraus folgt sofort, dass $f(0, \lambda) = 0$ für alle λ , also kann auch hier keine Saddle–Node–Verzweigung auftreten.

Normalform der Pitchfork–Verzweigung:

$$\dot{y} = \beta \lambda y - \delta y^3$$



Satz 9.2 (Pitchfork–Verzweigung im \mathbb{R}^n)

Betrachte ein System von Differentialgleichungen

$$\dot{x} = f(x, \lambda), \quad x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$$

mit der Symmetrie $f(-x, \lambda) = -f(x, \lambda)$. Damit ist $f(0, \lambda) = 0$ für alle λ . Weiter gelte:

(i) $D_x f(0, 0)$ besitzt einen einfachen Eigenwert 0 mit zugehörigem rechtem Eigenvektor e_r und linkem Eigenvektor e_ℓ ,

(ii) $e_\ell D_{x\lambda}^2 f(0, 0) \neq 0$,

(iii) $e_\ell D_x^3 f(0, 0) \neq 0$.

Dann existiert eine glatte Kurve von nichttrivialen Gleichgewichten in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, die durch den Punkt $(0, 0)$ verläuft und dort tangential an die Ebene $\lambda = 0$ ist.

Je nach Vorzeichen der Terme in (ii) und (iii) existieren dann entweder ein Gleichgewicht für $\lambda < 0$ und jeweils drei Gleichgewichte für alle kleinen $\lambda > 0$ oder umgekehrt.

9.2 Die Hopf-Verzweigung

Wir betrachten f mit der Linearisierung

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die spätere Rechnung vereinfacht sich, wenn man die komplexe Schreibweise mit $z = x_1 + ix_2$ benutzt. Genau genommen geht man zur Komplexifizierung \mathbb{C}^2 über und identifiziert dabei \mathbb{R}^2 mit dem Unterraum $U := \{(z, \bar{z}) \mid z \in \mathbb{C}\} \subseteq \mathbb{C}^2$. Dort wird eine lineare Abbildung induziert, die beschrieben wird durch die Matrix

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Nach Satz 8.6 enthält die Normalform von f nur Terme, die mit der Matrix

$$e^{\hat{A}Tt} = \begin{pmatrix} e^{-it} & 0 \\ 0 & e^{it} \end{pmatrix}$$

kommutieren. Damit der Unterraum U invariant bleibt, muss die Normalform die Gestalt $(g(z, \bar{z}), \overline{g(z, \bar{z})})$ haben. Wir wollen nun die Normalform N -ter Ordnung für beliebiges $N \in \mathbb{N}$ bestimmen. Dazu schreiben wir das Polynom g als

$$g(z, \bar{z}) = \sum_{k+\ell \leq N} a_{k\ell} z^k \bar{z}^\ell.$$

Die Bedingung aus Satz 8.6 lautet hier konkret

$$\begin{aligned} e^{-it} g(z, \bar{z}) &= g(e^{-it} z, e^{it} \bar{z}) \\ \sum_{k+\ell \leq N} a_{k\ell} e^{-it} z^k \bar{z}^\ell &= \sum_{k+\ell \leq N} a_{k\ell} e^{-ikt} z^k e^{i\ell t} \bar{z}^\ell \\ \sum_{k+\ell \leq N} a_{k\ell} (e^{-it} - e^{it(\ell-k)}) z^k \bar{z}^\ell &= 0 \end{aligned}$$

Daraus folgt sofort $k = \ell + 1$, die Gleichung in Normalform lautet also

$$\dot{z} = g(z) = \left(\sum_{\ell=0}^{\lfloor N/2 \rfloor} |z|^{2\ell} \right) z.$$

Kehren wir zu reellen Koordinaten $(x_1, x_2) = ((z + \bar{z})/2, (z - \bar{z})/2i)$ zurück, ergibt sich als Normalform N -ter Ordnung

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 Q_1(x_1^2 + x_2^2) - x_2 Q_2(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= x_1 Q_2(x_1^2 + x_2^2) + x_2 Q_1(x_1^2 + x_2^2) \end{aligned}$$

mit Polynomen Q_1 und Q_2 .

Eine ähnliche Normalformberechnung kann man auch durchführen, wenn die Differentialgleichung noch von einem Parameter λ abhängt. Wir nehmen an, dass dann bei $\lambda = 0$ die Linearisierung $D_x f(0, 0)$ gerade die Matrix A ist.

Als Normalform 3. Ordnung erhält man dann

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha_0(\lambda)x_1 - \beta_0(\lambda)x_2 + \alpha_1(\lambda)(x_1^2 + x_2^2)x_1 - \beta_1(\lambda)(x_1^2 + x_2^2)x_2 \\ \dot{x}_2 &= \beta_0(\lambda)x_1 + \alpha_0(\lambda)x_2 + \beta_1(\lambda)(x_1^2 + x_2^2)x_1 + \alpha_1(\lambda)(x_1^2 + x_2^2)x_2 \end{aligned}$$

wobei $\alpha_0(0) = 0$ und $\beta_0(0) = 1$.

Die Dynamik dieser Differentialgleichung lässt sich am besten untersuchen, wenn man zu Polarkoordinaten übergeht. Mit $x_1 = \rho \cos \phi$, $x_2 = \rho \sin \phi$ lauten die Differentialgleichungen dann

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \alpha_0(\lambda)\rho + \alpha_1(\lambda)\rho^3 =: h(\rho, \lambda) \\ \dot{\phi} &= \beta_0(\lambda) + \beta_1(\lambda)\rho^2 \end{aligned}$$

Die ρ -Gleichung ist unabhängig von ϕ , sie „entkoppelt“. Außerdem ist sie symmetrisch, denn $h(-\rho, \lambda) = -h(\rho, \lambda)$. Man prüft leicht nach, dass in $(0, 0)$ die Voraussetzungen für eine Pitchfork-Verzweigung erfüllt sind, falls $\alpha'_0(0) \neq 0$ und $\alpha_1(0) \neq 0$. Entweder für $\lambda > 0$ oder für $\lambda < 0$ treten also zwei neue Gleichgewichte

$$\rho_{\pm} \approx \pm \sqrt{\frac{\alpha'_0(0)}{\alpha_1(0)} \lambda}$$

auf. Außerdem ist für λ, ρ klein $\dot{\phi} \approx \beta_0(0) = 1$, die neuen Gleichgewichteder ρ -Gleichung entsprechen also einem periodischen Orbit des gesamten Systems. Das Verzweigungsdiagramm sieht also (für $\alpha'_0(0) > 0$ und $\alpha_1(0) > 0$) wie in Abbildung 9.2 aus.

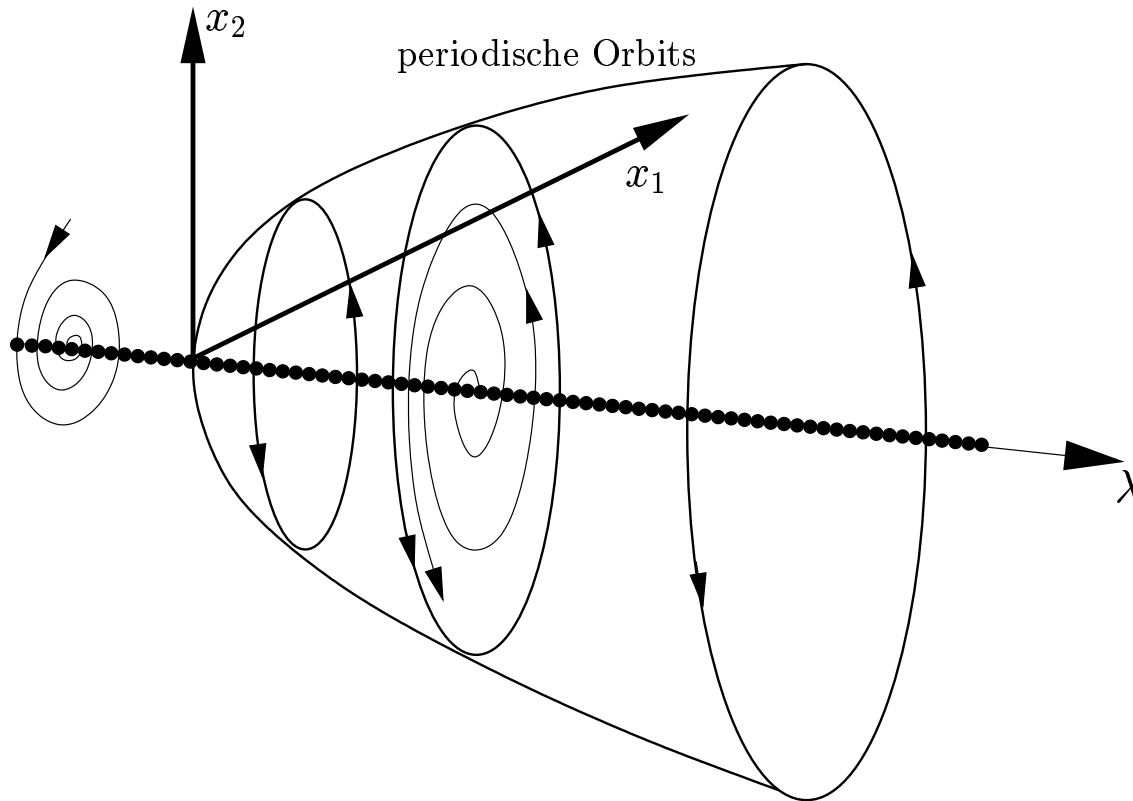
Man kann nun zeigen, dass dieses Bild erhalten bleibt, wenn man die volle Gleichung untersucht und nicht nur die Terme der Normalform 3. Ordnung berücksichtigt. Diese Rechnung ist etwas aufwändiger und beispielsweise in [Iooss & Adelmeyer] zu finden. Insgesamt erhält man damit folgenden Satz:

Satz 9.3 (Hopf-Verzweigung) *Betrachte ein System*

$$\dot{x} = f(x, \lambda), \quad x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$$

mit $f(0, \lambda) \equiv 0$.

Es gelte weiter:



- (i) $D_x f(0, \lambda)$ besitze ein einfaches Paar imaginärer Eigenwerte und keine weiteren Eigenwerte auf der imaginären Achse
- (ii) Diese Eigenwerte lassen sich fortsetzen als $\alpha(\lambda) \pm \beta(\lambda)i$ mit $\alpha(0) = 0$ und es gilt $\frac{d}{d\lambda}\alpha(0) \neq 0$.
- (iii) Der kubische Term in der Normalform von f ist $\neq 0$ (siehe oben).

Dann existiert eine Familie von periodischen Lösungen in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, die durch den Punkt $(0, 0)$ verläuft und dort tangential an die Ebene $\lambda = 0$ ist. Die Amplitude ist von der Ordnung $\mathcal{O}(\sqrt{|\lambda|})$.

Es existieren dann entweder keine (kleinen) periodischen Orbits für $\lambda < 0$ oder für $\lambda > 0$. Sei k die Anzahl der Eigenwerte von $D_x f(0, 0)$ mit negativem Realteil. Dann sind die beiden Gleichgewichte, die für festes $\lambda > 0$ bzw. $\lambda < 0$ existieren beide hyperbolisch. Eines der beiden besitzt eine k -dimensionale stabile Mannigfaltigkeit, das andere eine $(k+1)$ -dimensionale stabile Mannigfaltigkeit. Die beiden Gleichgewichte sind durch einen heteroklinen Orbit miteinander verbunden.