1. Übungsblatt zur Variationsrechnung

B. Fiedler, J. Härterich

Abgabe am 28.04.2005 in der Vorlesung

Aufgabe 1: Zeige, dass unter allen Dreicken mit gleichem Umfang, das gleichseitige Dreieck den größten Flächeninhalt hat.
Zeige allgemeiner, dass das regelmäßige n-Eck unter allen n-Ecken bei festgehaltenem Umfang die maximale Fläche hat. Formuliere dazu ein Extremalproblem mit Nebenbedingungen für die Eckpunkte $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2, 1 \leq i \leq n$.

Hinweis: Um die partiellen Ableitungen der Fläche nach den Eckpunkten zu kennen, reicht es, die Fläche *eines* Teildreiecks anzugeben!

Aufgabe 2: Die Chebychev-Polynome $T_k(x)$ sind explizit durch

$$T_0(x) = 1;\; T_n(x) = (1/2^{n-1}) \cos(n \arccos(x)) \text{ für } n \geq 1$$

auf dem Intervall $[-1, 1]$ gegeben. Zeige, dass $T_k(x)$ das Funktional

$$F(T) = \max_{-1 \leq x \leq 1} |T(x)|$$

auf dem (endlich-dimensionalen) Raum der Polynome vom Grad k mit führendem Koeffizienten 1 minimiert. Betrachte dazu die Nullstellen der Differenz von T_k und einem Polynom, das F minimiert.

Aufgabe 3: Zeige, dass der Operator

$$\varphi(u) : H^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R},$$

definiert als

$$\varphi(u) \cdot v = \int_\Omega \left(F_u(x, u, \nabla u) \cdot v(x) + F_p(x, u, \nabla u) \cdot \nabla v(x)\right) \mathrm{d}x$$

mit festem $u \in C^1(\overline{\Omega})$ beschränkt linear ist. Dabei sei Ω ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand und die Funktion F sei stetig differenzierbar.
Freiwillig: Beweise diese Aussage, falls $u \in H^{1,2}(\Omega)$ und F die Voraussetzungen aus Satz 1.2 der Vorlesung erfüllt.
Tipp: Für welche q liegt $v \in H^{1,2}(\Omega)$ auch in $L^q(\Omega)$?

Aufgabe 4: Löse die zum Funktional

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{2y(x)}}\, \mathrm{d}x, \quad y(0) = 0,\; y(1) = 1$$

der Brachistochrone gehörigen Eulergleichungen explizit!
Hinweis: Die Euler-Gleichungen lassen sich auf die Form $\frac{-1}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = const.$ bringen. Die Integralkurven sind dann Zykloiden.