10. Übungsblatt zur Variationsrechnung

B. Fiedler, J. Härterich

Abgabe am 30.06.2005 in der Vorlesung

Aufgabe 37: Bezeichne $S \subset \mathbb{R}^3$ die z-Achse, und γ eine stetige, geschlossene Kurve (d.h. $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, stetig mit $\gamma(0) = \gamma(1)$), die sich zweimal um S windet.
Man kann γ als Rand eines Möbiusband Q_1 betrachten, oder auch als Rand einer Kreisscheibe Q_2. (Skizze ?!)
Zeige, dass S mit $\gamma = \partial Q_2$ verkettet ist, aber nicht mit $\gamma = \partial Q_1$!

Aufgabe 38: Betrachte das Funktional $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, das gegeben ist durch

$$\varphi(x,y,z) = \varphi_1(r) + (3 + \sin x + \sin y)z^2,$$

wobei $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$. Dabei sei $\varphi_1(0) = \varphi_1'(0) = 0$, φ_1 sei monoton wachsend auf $[0,1]$, monoton fallend auf $[1,2]$ und strebe auf $[2,\infty)$ monoton gegen unendlich. Sei außerdem $\varphi_1(2) > 0$.
Zeige zunächst, dass φ koerziv ist, und daher die Palais-Smale-Bedingung erfüllt.
Zeige weiter, dass φ einen strikt positiven kritischen Punkt besitzt.
Tipp: Linking-Satz unter Benutzung einer Kreisscheibe Q in der x-y-Ebene und einer geeigneten Menge S in der x-z-Ebene.

Aufgabe 39: Wie lautet das Funktional $\varphi : H_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$, dessen kritische Punkte schwache Lösungen der elliptischen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} -\Delta u &= a(x)u + u|u|^{p-1}, \quad x \in \Omega \\ u &= 0, \quad x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

sind ?
Dabei sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand, a stetig und $1 < p < 5$.
Berechne die Ableitungen $\varphi'(u)$ und $\varphi''(0)$.

Aufgabe 40: Mit einem Linking-Argument kann man die Existenz periodischer Orbits in Hamilton-Systemen zeigen. Genauer gilt folgender Satz:
Falls 1 *regulärer Wert einer Hamiltonfunktion $H \in C^2(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$ ist und die Energiefläche $H^{-1}(1)$ zusammenhängend und kompakt ist, dann gibt es eine Folge $\beta_n \to 1$, so dass jede Energiefläche $H^{-1}(\beta_n)$ eine periodische Lösung enthält.*

(i) Gib eine Hamiltonfunktion H an, für die 1 ein regulärer Wert ist, die kompakte Energiefläche $H^{-1}(1)$ jedoch keinen periodischen Orbit enthält.

(ii) Zeige, dass die Aussage des Satzes nicht gilt, falls $H^{-1}(1)$ nicht zusammenhängend oder nicht kompakt ist.

Achtung: Am 27.6.2005 findet kein Tutorium statt !