

2. Übungsblatt zur Variationsrechnung

B. Fiedler, J. Härterich

Abgabe am 05.05.2005 in der Vorlesung

Aufgabe 5: Wir wollen rotationssymmetrische Minimalflächen explizit berechnen. Zeige dazu, dass der Flächeninhalt der Drehfläche, die durch Drehung einer Kurve $u(z)$, $z \in [0, 1]$ mit $u(z) > 0$ um die z -Achse entsteht, durch

$$I = 2\pi \int_0^1 u \sqrt{1 + u'^2} \, dx$$

gegeben ist.

Löse nun die Eulergleichungen von I explizit für die Randbedingungen $u(0) = a$, $u(1) = b$ und skizziere die Lösungskurve $u(z)$.

Tipp: Mit $f(u, p) := u \sqrt{1 + p^2}$ lauten die Eulergleichungen

$$\left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{u=u(z), p=u'(z)} - \frac{d}{dz} \left. \frac{\partial f}{\partial p} \right|_{u=u(z), p=u'(z)} = 0.$$

Auch hier existiert wieder ein erstes Integral: $\Phi(u, u') = \frac{\sqrt{1+u'^2}}{u}$.

Aufgabe 6: Sei X reflexiver Banachraum, Y Banachraum und $A : X \rightarrow Y$ eine möglicherweise nichtlineare Abbildung. Dann sind äquivalent:

- (a) A ist kompakt, d.h. die Bilder beschränkter Mengen sind relativ kompakt.
- (b) A ist schwach stetig, also $u_m \rightharpoonup u \implies A(u_{m_k}) \rightarrow v$ für eine Teilfolge.

Aufgabe 7: Sei X Banachraum. Ist die Norm in X stetig, schwach stetig, unterhalb stetig, schwach unterhalb stetig, differenzierbar? Gib gegebenenfalls Gegenbeispiele an!

Was kann man über Differenzierbarkeit in $X \setminus \{0\}$ sagen?

Untersuche gesondert die Fälle $X = L^1([0, 1])$ und $X = \text{Hilbertraum}$!

Aufgabe 8: Sei $p \in L^2(0, 2\pi)$ gegeben. Setze $u_m(x) := p(mx)$, wobei p zu einer 2π -periodischen Funktion fortgesetzt wird. Zeige, dass

$$u_m \rightharpoonup \bar{p} := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(x) \, dx.$$

Die **Übungen** finden immer montags, 12-14 Uhr im Seminarraum 009, Arnimallee 2-6 bei **Jörg Härterich** (haerter@math.fu-berlin.de, Tel. 838-75406, Raum 136) statt.

WWW-Seite zur Vorlesung: <http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/>