3. Übungsblatt zur Variationsrechnung

B. Fiedler, J. Härterich

Abgabe am 12.05.2005 in der Vorlesung

Aufgabe 9: Sei M eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge eines reflexiven Banachraums X. Zeige, dass dann für jedes $y \in X$ ein $x_0 \in M$ existiert, so dass

$$d(y, M) = \|y - x_0\|.$$

Aufgabe 10: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und es gelte

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{in } L^{p_1}(\Omega), \quad v_n \to v \quad \text{in } L^{p_2}(\Omega)$$

für Zahlen $1 < p_1,\ p_2 < \infty$ mit $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1$. Zeige, dass dann

$$u_n v_n \rightharpoonup uv \quad \text{in } \ L^1(\Omega).$$

Aufgabe 11: Ist das Funktional

$$\varphi_1(u) = \int_{-1}^{1} (xu'(x))^2 \,\mathrm{d}x, \quad u \in H^{1,2},\ u(1) = 1,\ u(-1) = -1$$

schwach unterhalbstetig? Ist φ_1 koerziv?
Was gilt entsprechend für das Funktional

$$[0, \infty] \ni \varphi_2(u) = \int_{-1}^{1} [((u'(x))^2 - 1)^2 + u^2(x)] \,\mathrm{d}x, \quad u \in H^{1,2} \quad ?$$

Aufgabe 12:

(i) Beweise die *Poincaré-Ungleichung*: Es existiert eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $u \in H_0^1([0,1], \mathbb{R})$

$$\int_0^1 |u(x)|^2 \,\mathrm{d}x \le C \int_0^1 |u'(x)|^2 \,\mathrm{d}x.$$

Tipp: Es genügt $u \in C_0^\infty([0,1], \mathbb{R})$ zu betrachten.

(ii) Sei X normierter Vektorraum und $\varphi : X \to \mathbb{R}$ stetig. Wie in der Vorlesung seien $\varphi^\alpha := \{u \in X;\ \varphi(u) \le \alpha\}$ die zugehörigen Sublevelmengen.
Zeige: φ konvex $\Rightarrow$ φ^α konvex für alle α.

Gilt auch die Umkehrung ?