

4. Übungsblatt zur Variationsrechnung

B. Fiedler, J. Härterich

Abgabe am 19.05.2005 in der Vorlesung

Aufgabe 13: Sei X ein unendlich-dimensionaler Banachraum und $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Wie in der Vorlesung bezeichnen wir für $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\varphi^\alpha := \{x \in X; \varphi(x) \leq \alpha\}$ die *Sublevelmengen* von φ .

Kann φ^α dann für ein $\alpha > \inf \varphi$ kompakt sein ?

Aufgabe 14: Zeige, dass für jedes messbare $G \subset \Omega$ das Infimum des Funktional

$$\varphi(u) = \frac{1}{2} \int_G k_1 |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega \setminus G} k_2 |\nabla u|^2 + \int_\Omega f u, \quad u \in H_0^{1,2}(\Omega), \quad 0 < k_1 < k_2, \quad f \text{ stetig}$$

tatsächlich angenommen wird. Ist dieses Minimum u eindeutig?

Zeige ausserdem, dass φ differenzierbar ist.

Sei nun speziell $\Omega = [-1, 1]$ und $G = [0, 1]$. Zeige, dass das Minimum u stetig, aber nicht differenzierbar ist und berechne den Sprung der Ableitung in $x = 0$!

Aufgabe 15: Variationsungleichung

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Betrachte das Funktional

$$\varphi(u) = \int_\Omega ((\nabla u)^T a(x) \nabla u + f \cdot u) \, dx$$

auf dem Raum

$$X := \{u \in H^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}); u - g \in H_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}) \text{ und } u \geq 0 \text{ fast überall}\},$$

wobei wie in der Vorlesung $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^{1,2}(\Omega)$, $g \geq 0$ und $a \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ mit $a(x) > c > 0$, vorgegeben sind.

- (i) Zeige, dass φ sein Minimum genau dann in $u_{\min}$ annimmt, wenn für alle $v \in X$ die *Variationsungleichung*

$$\int_\Omega (2(\nabla u_{\min})^T a(x) (\nabla v - \nabla u_{\min}) + f \cdot (v - u_{\min})) \, dx \geq 0$$

erfüllt ist.

Tipp: X ist konvex.

- (ii) Sei $\Omega_+ := \{x \in \Omega; u_{\min}(x) > 0\}$. Nimm nun an, dass Ω_+ ein glatt berandetes Gebiet ist und $u_{\min} \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Zeige, dass $u_{\min}$ dann in Ω_+ die partielle Differentialgleichung

$$\operatorname{div}(a(x) \nabla u(x)) = f(x) u(x)$$

löst. Welche Randbedingungen erfüllt $u_{\min}$ bei $\partial\Omega_+ \cap \partial\Omega$ bzw. bei $\partial\Omega_+ \setminus \partial\Omega$?

Aufgabe 16: Im Banachraum X sei $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und konvex. Sei weiter $u \in X$ ein kritischer Punkt, d.h. $D\varphi(u) = 0$. Zeige, dass dann u ein Minimum von φ ist. Ist dieses Minimum eindeutig ?

Bemerkung: Daran sieht man, dass konvexe Funktionale nicht das Problem des geknickten Stabes beschreiben können, da hier kritische Punkte auf verschiedenen Energieniveaus existieren: der geknickte und der gerade Stab.