6. Übungsblatt zur Variationsrechnung

B. Fiedler, J. Härterich

Abgabe am 02.06.2005 in der Vorlesung

Aufgabe 21:
Sei $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2<1\}$ die Einheitskreisscheibe und

$$\begin{aligned} \mathbf{u} : \overline{\Omega} &\to \mathbb{R} \\ z=(x,y) &\mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

eine Fläche, die sich als Graph über $\overline{\Omega}$ darstellen lässt, und die das Flächeninhaltsfunktional

$$A(\mathbf{u}) = \int_\Omega \sqrt{\det(\,(\nabla\mathbf{u})^T \nabla\mathbf{u})}\,\mathrm{d}z$$

aus der Vorlesung minimiert.
Welche partielle Differentialgleichung löst dann die Funktion f in Ω ? (Es darf dabei angenommen werden, dass f zweimal stetig differenzierbar ist.)

Aufgabe 22: Sei V ein Banachraum, $G : V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ sei konvex und unterhalb-stetig und für $v_1,\ v_2 \in V$ gelte $G(v_i) < \infty$, $i = 1,2$.
Zeige:

(i) Falls $v_1^* \in \partial G(v_1)$ und $v_2^* \in \partial G(v_2)$, dann ist

$$\langle v_1 - v_2, v_1^* - v_2^* \rangle \geq 0.$$

(ii) $\partial G(v_1) = \{v^*\} \quad \Longrightarrow \quad G$ ist Gateaux-differenzierbar in v_1.
Die Richtungsableitung im Punkt v_1 in Richtung w ist dann gegeben durch $\langle w, v^* \rangle$.

Aufgabe 23: Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion.
Ist F dann automatisch stetig? Oder sogar Lipschitz-stetig?
Existieren links- und rechtsseitige Ableitungen ? Ist F differenzierbar ?
Was kann man für konvexe $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sagen ?

Aufgabe 24: Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex.
Berechne explizit die Legendre-Fenchel-Transformierten F^* und F^{**} für die Funktionen $F(x) = (x,y) - \alpha, \quad y \in \mathbb{R}^n,\ \alpha \in \mathbb{R}$, sowie für $F(x) = \frac{1}{p}\sum_{j=1}^n |x_j|^p$ mit $p > 1$.

Welches sind die Fixpunkte der Legendre-Fenchel-Transformation, d.h. für welche F gilt $F = F^*$?