7. Übungsblatt zur Variationsrechnung

B. Fiedler, J. Härterich

Abgabe am 09.06.2005 in der Vorlesung

Aufgabe 25:
Die reguläre Energiefläche $S_\alpha = \{z \in \mathbb{R}^{2N};\ H(z) = \alpha\}$ einer Hamiltonfunktion $H : \mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}$ sei eine Sphäre. Insbesondere gelte $\nabla H(z) \neq 0$ für $z \in S_\alpha$. Zeige, dass dann jeder Orbit des Hamiltonsystems $\dot{z} = J\nabla H(z)$ mit Energie α periodisch ist.
Wieviele periodische Orbits gibt es, falls S_α ein Ellipsoid ist?

Aufgabe 26:
Untersuche, ob die folgenden drei Funktionale die Palais-Smale-Bedingung erfüllen.

(i) $\varphi_1(x,y) = \sin x + xy^2$ auf $X = \mathbb{R}^2$,

(ii) $\varphi_2(x,y,z) = xy + yz + xz + 2005x$ auf $X = \mathbb{R}^3$ und

(iii) $\varphi_3(u) = \int_0^{1/2} u^2(x)\,\mathrm{d}x$ auf $X = L^2([0,1],\mathbb{R})$.

Aufgabe 27:
Sei X ein Banachraum und $\psi \in C^1(X,\mathbb{R})$ erfülle die Palais-Smale-Bedingung. Zeige:

(i) Die Menge $K_\beta := \{x \in X;\ \psi(x) = \beta, D\psi(x) = 0\}$ ist für jedes $\beta \in \mathbb{R}$ kompakt,

(ii) Falls $K_\beta = \emptyset$ für ein $\beta \in \mathbb{R}$, dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$|\psi(x) - \beta| < \delta \ \Rightarrow\ \|D\psi(x)\| > \delta.$$

Aufgabe 28:

(i) Sei $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$.
Zeige: Falls, die Funktion $|\varphi| + \|D\varphi\|$ koerziv ist, dann erfüllt φ die Palais-Smale-Bedingung.

(ii) Sei $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, von unten beschränkt und erfülle die Palais-Smale Bedingung. Zeige, dass f dann koerziv ist und sein Infimum annimmt.