8. Übungsblatt zur Variationsrechnung

B. Fiedler, J. Härterich

Abgabe am 16.06.2005 in der Vorlesung

Aufgabe 29: Seien X, Y Bannachräume und $L : X \to Y$ eine Abbildung. Beweise oder widerlege:

1. L linear, kompakt $\Rightarrow$ L stetig.
2. L linear, stetig $\Rightarrow$ L schwach stetig (d.h. $x_n \rightharpoonup x \Rightarrow Lx_n \rightharpoonup Lx$).
3. L linear, kompakt $\Rightarrow$ L schwach stetig.
4. L nichtlinear, kompakt $\Rightarrow$ L schwach stetig.

Was ändert sich, wenn X oder Y reflexiv ist?

Aufgabe 30:
Sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch:

$$\varphi(x, y) = 9(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)^2 + y \sin(x)$$

Zeige, dass φ einen strikt positiven, kritischen Wert annimmt.

Aufgabe 31:
Sei Y ein Banachraum und X ein Unterraum von Y, kurz $X \leq Y$. Die kanonische Inklusion $i : X \to Y$ ist injektiv und definiert damit eine Einbettung von X in Y.
Behauptung: Der Dualraum Y^* ist in X^* eingebettet.
Beispiel: $Y = \mathbb{R}^2$ und $X = \mathbb{R}$...
Was ist schief gegangen? Gib Beispiele von X und Y an, wo die Behauptung gilt. Finde Bedingungen auf X und Y, damit die Behauptung gilt.

Aufgabe 32:
Sei $u \in L^p_0 := L^p([0,1], \mathbb{R}^{2N}) \cap \{\int_0^1 u = 0\}$. Wir betrachten den Operator

$$(Ku)(t) := \int_0^t Ju(s)ds$$

wobei

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -Id_N \\ Id_N & 0 \end{pmatrix}$$

1) Beweise oder widerlege, dass $K : L^p_0 \to L^p$ beschränkt ist. Ist K sogar kompakt?

Sei nun

$$\Phi(u,v) := \int_0^1 (u(t))^T (Kv)(t)dt, \text{ und}$$
$$\varphi(u) := \Phi(u,u).$$

2) Beweise oder widerlege, dass Φ symmetrisch ist, d.h. $\Phi(u,v) = \Phi(v,u)$ für alle $u, v \in L_0^p$

3)Entscheide, ob φ als Abbildung von L_0^p nach $\mathbb{R}$ unterhalbstetig, stetig, schwach unterhalbstetig, oder schwach stetig ist.