

9. Übungsblatt zur Variationsrechnung

B. Fiedler, J. Härterich

Abgabe am 23.06.2005 in der Vorlesung

Aufgabe 33: Sei Ω eine offene, beschränkte Menge in $\mathbb{R}^n$ mit glattem Rand $\partial\Omega$, und

$$G : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

eine Abbildung mit Ableitung $g(x, u) := G_u(x, u)$ in $C^0(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ von superlinear beschränktem Wachstum, d.h.

$$|g(x, u)| \leq C(1 + |u|^s)$$

für ein $s > 1$ (falls $n < 3$, soll auch $s < \frac{n+2}{n-2}$ erfüllt sein), und gelte weiter für ein $R > 0$ und ein $\mu > 2$

$$0 < \mu G(x, u) \leq u g(x, u)$$

für alle $|u| \geq R$ und $x \in \overline{\Omega}$.

Betrachte das Funktional

$$\varphi(u) = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 - G(x, u(x)) \right] dx, \quad u \in X = H_0^{1,2}(\Omega).$$

Zeige, dass $\varphi \rightarrow -\infty$ für $|u|_X \rightarrow \infty$, gleichmäßig auf beliebigen endlichdimensionalen Teilräumen von X !

Freiwilliger Zusatz: Ist die Konvergenz auch gleichmäßig auf ganz X ?

Aufgabe 34: Berechne $\deg(f, \Omega, 0)$ durch Approximation mit Funktionen, für die 0 ein regulärer Wert ist,

(i) für $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x, x^2 + y^2)$, $\Omega = (-1, 1)^2$,

(ii) für $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (xy, x^2 - y^2)$, $\Omega = \{(x, y); x^2 + y^2 < 1\}$.

Aufgabe 35: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen und ausserdem symmetrisch bezüglich 0, d.h. $x \in \Omega \Leftrightarrow -x \in \Omega$. Sei weiter $f \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ und $f(\partial\Omega) \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

(i) Zeige, dass $\deg(f, \Omega, 0) = 0$ gilt, falls f gerade ist.

(ii) *Freiwilliger Zusatz:* Zeige, dass $\deg(f, \Omega, 0)$ ungerade ist, falls f ungerade und $0 \in \Omega$ ist.

Aufgabe 36: Sei $L_0^p := L^p([0, 1], \mathbb{R}^{2N}) \cap \{\int_0^1 u = 0\}$, wie in der Aufgabe 32. Wir modifizieren nun den Operator

$$\begin{aligned} K : L_0^p &\longrightarrow L^p \\ u &\longmapsto \left(t \mapsto \int_0^t J u(s) ds \right) \end{aligned}$$

aus der Aufgabe 32, um auch im Bild einen Mittelwert 0 zu erzielen:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{K} : L_0^p & \longrightarrow & L_0^p \\ u & \longmapsto & Ku - \int_0^1 (Ku)(t)dt \end{array}$$

Berechne alle Eigenwerte $\lambda \neq 0$ und die dazugehörigen Eigenvektoren von $\tilde{K}$, d.h. $0 \neq u \in L_0^p$ mit $\tilde{K}u = \lambda u$.