

## Übungen

### Einführung in die Dynamischen Systeme

Stefan Liebscher

Abgabe: Mittwoch, 20.4.2005, in der Vorlesung

**Aufgabe 1:** Sei  $\Phi$  ein Fluss auf  $X = \mathbb{R}^n$ . Bezeichne

$$S_\vartheta : \mathbb{R} \times X \rightarrow \mathbb{R} \times X, \quad (t, x) \mapsto (t + \vartheta, x)$$

den Zeit-Shift auf dem erweiterten Phasenraum  $\mathbb{R} \times X$ .

- (i) Zeige, dass  $S_\vartheta$  für jedes feste  $\vartheta$  Integralkurven von  $\Phi$  in Integralkurven überführt.
- (ii) Wann wird eine Integralkurve durch ein bestimmtes  $S_\vartheta$  festgelassen?
- (iii) Wann durch alle  $S_\vartheta$ ?

**Aufgabe 2:** Gegeben sei ein Fluss  $\Phi$ . Die Trajektorie  $\Phi_t(x_0)$  durch  $x_0$  sei periodisch mit beliebig kleiner Periode, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists 0 < T < \varepsilon \quad \Phi_T(x_0) = x_0.$$

Zeige, dass dann  $x_0$  ein Gleichgewicht ist.

**Aufgabe 3:** Wir betrachten einen Fluss  $\Phi(t, x)$  auf der reellen Achse  $x \in \mathbb{R}$ .

- (i) Welche  $\alpha$ - und  $\omega$ -Limesmengen können auftreten?
- (ii) Zeichne einige Phasenportraits, die verschiedene mögliche Phänomene zeigen.

*Hinweis:* Betrachte beschränkte und unbeschränkte Trajektorien.

**Aufgabe 4:** Der Fluss  $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  des mathematischen Pendels ist gegeben durch das Vektorfeld

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -\sin x \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass der Fluss  $\Phi$  äquivariant unter der Verschiebung um eine volle Pendelumdrehung ist, d.h.

$$\Phi\left(t, \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\pi \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \Phi\left(t, \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} 2\pi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{für alle } t, x, v.$$

*Hinweis:* Die Eindeutigkeit der Lösung einer Differentialgleichung kann benutzt werden.