Übungen

Einführung in die Dynamischen Systeme

Stefan Liebscher

Abgabe: Mittwoch, 27.4.2005, in der Vorlesung

Aufgabe 5: Betrachte die Abbildung

$$\Phi_t(x_1, x_2) = (x_1 + t, x_2 + \sigma t), \qquad \sigma \in \mathbb{R},$$

die

$$\Phi_t(x_1 + k, x_2 + n) = \Phi_t(x_1, x_2) + (k, n), \qquad \forall k, n \in \mathbb{Z},$$

erfüllt und deshalb einen Fluss auf dem 2-Torus $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ erklärt. Sei zunächst σ rational. Wie sehen dann typische Trajektorien aus? Beschreibe α- und ω-Limesmengen.

Freiwilliger Zusatz: Was passiert für irrationale σ?

Aufgabe 6: Betrachte das gedämpfte Pendel

$$\ddot{x} + \mu\dot{x} + \sin x = 0,$$

mit $\mu > 0$. Zeige, dass die Energie

$$H(x, \dot{x}) = \tfrac{1}{2}\dot{x}^2 - \cos x$$

entlang Trajektorien *streng* monoton fällt, außer in Ruhelagen.

Freiwilliger Zusatz: Konvergiert jede Trajektorie gegen eine Ruhelage?

Aufgabe 7: Wir betrachten noch einmal die Anzahl a_n von Fibonaccis Kaninchenpaaren nach n Monaten. Wie zuvor bekommt jedes Paar ab seinem zweiten Lebensmonat monatlich genau ein Paar Junge. Allerdings wollen wir diesmal in jedem Monat noch ein zusätzliches neugeborenes Kaninchenpaar in den Garten setzen.

(i) Wie lautet in diesem Fall die Rekursionsformel für die a_n? Wie lauten die ersten Glieder a_n für $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$?

(ii) Zeige, dass

$$a_n = C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n - 1$$

mit Konstanten C_1, C_2 eine Lösung der Rekursion ist, und bestimme C_1, C_2 so, dass die k_n mit den in Teil (i) berechneten übereinstimmen.

Aufgabe 8: Das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} x,$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$. Transformiere diese lineare Differentialgleichung auf Polarkoordinaten:

$$x = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix},$$

mit $r > 0$, $\varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Skizziere für $a < 0$, $a = 0$, $a > 0$ und selbst gewählte b die Phasenportraits in (r, φ) sowie x.