Übungen

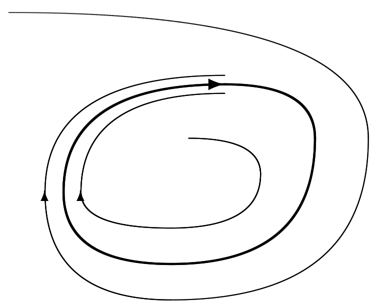
Einführung in die Dynamischen Systeme

Stefan Liebscher

Abgabe: Mittwoch, 4.5.2005, in der Vorlesung

Aufgabe 9: Gegeben sei ein periodischer Orbit Γ in $X = \mathbb{R}^n$ und eine Umgebung U von Γ in X, so dass jede Trajektorie $\gamma(x_0)$, $x_0 \in U$, für $t \to \infty$ gegen Γ konvergiert.

Beispiel:



Zeige, dass dann jedes erste Integral in U konstant ist.

Aufgabe 10: Für welche $k \in \mathbb{R}$ hat das System

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_1 \\ \dot{x_2} &= kx_2 \end{aligned}$$

mit $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ein nichtkonstantes erstes Integral?

Aufgabe 11: Löse die folgenden Anfangswertprobleme durch „Trennung der Variablen“:

(i) $\dot{x} = x^3 e^t, \qquad x(0) = 2,$

(ii) $\dot{x} = 4 + x^2, \qquad x(0) = 0,$

(iii) $\dot{x} = 1 - x^2, \qquad x(0) = 0.$

Wie groß ist jeweils das maximale Existenzintervall der Lösung?

Aufgabe 12: Ein punktförmiger Hund hat im (x, y)-Ursprung des $\mathbb{R}^2$ eine Wurst geschnappt und rennt mit der Geschwindigkeit 1 die x-Achse entlang. Gleichzeitig rennt ein zweiter Hund im Punkt $x = 0$, $y = d$ los, immer mit Geschwindigkeit 1 auf den ersten zu.

Wie nahe kommen sich die Hunde?

Hinweis: Beschreibe die Dynamik in geeigneten Koordinaten (z.B. r = Abstand der Hunde, φ = Winkel zwischen der Verbindungsgeraden der Hunde und der x-Achse) und löse dieses System z.B. durch Trennung der Variablen.

***Aufgabe 13 (freiwillig):** Beweise oder widerlege für Vektorfelder f im $\mathbb{R}^3$: Gilt $\operatorname{div} f = 0$ so hat f ein reguläres Erstes Integral.

Erinnerung: Ein Erstes Integral I heißt genau dann regulär, falls ∇I nur in Nullstellen des Vektorfeldes verschwindet.