Übungen

Einführung in die Dynamischen Systeme

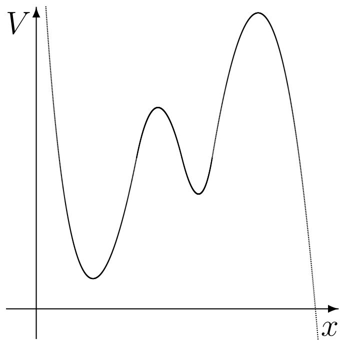
Stefan Liebscher

Abgabe: Mittwoch, 11.05.2005, in der Vorlesung

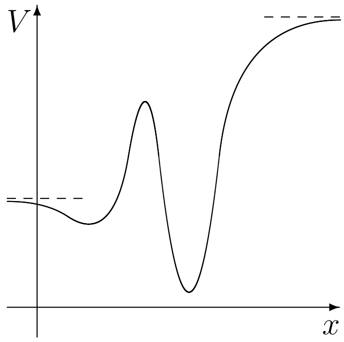
Aufgabe 15 Zeichne die Trajektorien von $\ddot{x} + V'(x) = 0$

(i) für das Kepler-Problem, $V(x) = -\frac{1}{x} + C\frac{1}{x^2}$, $C > 0$, $x > 0$;

(ii)



(iii)



Aufgabe 16 In einem Meer mögen Beute- und Räuberfische x bzw. y leben, die dem Volterra-Lotka Gesetz

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(\mu - \nu y), \\ \dot{y} &= y(-\varrho + \sigma x), \end{aligned}$$

mit $x, y, \mu, \nu, \varrho, \sigma > 0$ gehorchen. Durch ε-behutsames Netz-Fischen, $\varepsilon > 0$, wird μ zu $\tilde{\mu} = \mu - \varepsilon$ und ϱ zu $\tilde{\varrho} = \varrho + \varepsilon$. (Warum?) Wird dadurch der zeitlich gemittelte Beutefischbestand

$$\overline{x} := \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t x(\tau)\mathrm{d}\tau$$

größer oder kleiner? Was gilt für den Gesamtfischbestand $\overline{x+y}$?

Hinweis: $x = \sigma^{-1}(\dot{y}/y + \tilde{\varrho})$.

Aufgabe 17 Betrachte die von einem Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ abhängige Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = x^2 + \lambda, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Skizziere das zugehörige Phasenportrait auf $X = \mathbb{R}$ für $\lambda = -2$, $\lambda = -1$ und $\lambda = 1$. Für welche Werte von λ ist das Verhalten der Lösungen ähnlich wie bei $\lambda = -2$, wann ändert sich das Verhalten?

Aufgabe 18 Untersuche numerisch mit `dstool` den Van-der-Pol-Oszillator

$$\begin{aligned} \varepsilon\dot{x} &= y + x(1 - x^2) \\ \dot{y} &= -x \end{aligned}$$

mit Startwert $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ bis $t = 10$ für $\varepsilon = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0007$ und 0.0002. Benutze dazu das Runge-Kutta-Verfahren mit Schrittweite $h = 10^{-3}$. Beschreibe Beobachtungen und Probleme! Treten die Probleme auch auf, wenn man einen der anderen Löser benutzt?

Freiwilliger Zusatz: Kannst Du erklären, was beim „normalen" Runge-Kutta-Verfahren bei $\varepsilon = 0.0007$ passiert?