Übungen

# Einführung in die Dynamischen Systeme

Stefan Liebscher

**Abgabe: Mittwoch, 18.05.2005, in der Vorlesung**

**Aufgabe 19** Betrachte die Pendelgleichung

$$\ddot{x} + g(x) \;=\; 0$$

für eine stetige ungerade Funktion $g$ mit $g(x) \cdot x > 0$ für $x \neq 0$. Sei $p(g,a) > 0$ die minimale Periode der Lösung mit Anfangswert $x(0) = a > 0$, $\dot{x}(0) = 0$. Zeige:

(i) Falls $g_1(x) < g_2(x)$ für alle $x > 0$, dann ist $p(g_1, a) > p(g_2, a)$ für alle $a > 0$.

(ii) Falls $x \mapsto g(x)/x$ für $x > 0$ streng monoton fällt, dann wächst $a \mapsto p(g,a)$ streng monoton für $a > 0$.

*Hinweis:* $y(t) := \frac{a_1}{a_2} x(t)$ löst die Gleichung $\ddot{y} + \tilde{g}(y) = 0$ mit $\tilde{g}(y) := \frac{a_1}{a_2} g(\frac{a_2}{a_1} y)$.

**Aufgabe 20** Durch Trennung der Variablen kann man zeigen, dass das Anfangswertproblem

$$\dot{x} \;=\; x^2, \qquad x(0) \;=\; 1$$

für $-\infty < t < 1$ eine Lösung besitzt, die „explodiert“:

$$\lim_{t \to 1} x(t) \;=\; +\infty.$$

Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ die Folge der Picard-Iterierten

$$x_{n+1}(t) \;=\; 1 + \int_0^t f(x_n(s))\,\mathrm{d}s, \qquad x_0(t) \;\equiv\; 1.$$

(i) Zeige, dass $x_k(t)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.

(ii) Berechne explizit $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ und $x_4(t)$.

(iii) Für welche $t \in \mathbb{R}$ konvergieren die $x_k(t)$ gegen die Lösung $x(t)$ des Anfangswertproblems?

*Freiwilliger Zusatz:* Zeichne mit Hilfe des Computers (z.B. mit `MATLAB`) die Graphen der ersten acht Näherungen auf dem Intervall $t \in [-4, 2]$.

**Aufgabe 21**

(i) Löse folgendes *lineare* Anfangswertproblem durch „Trennung der Variablen“:

$$\dot{x} \;=\; a(t)x, \qquad x(0) \;=\; x_0, \qquad a \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

(ii) Löse dann die *inhomogene* lineare Differentialgleichung

$$\dot{x} \;=\; a(t)x + b(t), \qquad x(0) \;=\; x_0, \qquad a, b \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}),$$

indem Du eine (leicht lösbare) Differentialgleichung herleitest für

$$y(t) := \; x(t)\, \exp\left( - \int_0^t a(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right).$$

**Aufgabe 22** Sei $f : X \to X = \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig. $J(x_0) = (t_-(x_0), t_+(x_0))$ bezeichne das maximale Existenzintervall der Lösung von

$$\dot{x}(t) \;=\; f(x(t)), \qquad x(0) \;=\; x_0.$$

Zeige, dass $x_0 \mapsto t_+(x_0) \in (0, \infty]$ unterhalb-stetig ist.

*Freiwilliger Zusatz:* Ist $t_+$ auch oberhalb-stetig (also sogar stetig)?

*Erinnerung:* Eine Funktion $g$ heißt unterhalb-stetig in $x_0$ genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \qquad (\; |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; g(x) - g(x_0) > -\varepsilon \;),$$

und oberhalb-stetig genau dann, wenn $-g$ unterhalb-stetig ist.