Übungen

Einführung in die Dynamischen Systeme

Stefan Liebscher

Abgabe: Mittwoch, 25.05.2005, in der Vorlesung

Aufgabe 23 Betrachte die autonome Differentialgleichung

$$\dot{x} \;=\; f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

mit Lipschitz-stetiger rechter Seite. Es gelte für alle $x \in \mathbb{R}^n$ die Ungleichung

$$(*) \qquad f(x)^T x \;\geq\; \|x\|^3_{\mathbb{R}^n}.$$

Zeige: Dann existiert keine nichttriviale globale Vorwärtslösung, d.h. die maximale Existenzzeit $t_+(x_0)$ einer Lösung $x(t)$ mit beliebigem Anfangswert $x_0 \neq 0$ ist beschränkt.

Freiwilliger Zusatz: Ist $x = 0$ automatisch eine Ruhelage, wenn $(*)$ erfüllt ist?

Aufgabe 24 Sei $f: \; X \times \mathbb{R} \to X = \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Bezeichne $x(t,s)$ die Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) \;=\; f(x(t),t), \qquad x(s) \;=\; x_0,$$

zur Zeit t. Kann man für festes t, für das $x(t,t_0)$ existiert, die Abbildung

$$x(t,\cdot) \,:\, (t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon) \longrightarrow X, \qquad s \longmapsto x(t,s),$$

in einer Umgebung von t_0 nach s differenzieren? Welche Differentialgleichung erfüllt gegebenenfalls $v(t) := \partial_s x(t,s)|_{s=t_0}$?

Aufgabe 25 Berechne numerisch (etwa mit `dstool`) die Wronski-Matrix $W(t)$ zur Lösung $x(t)$ der Lorenz-Gleichung

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y-x), \\ \dot{y} &= \rho x - y - xz, \\ \dot{z} &= -\beta z + xy, \end{aligned}$$

mit den Parametern $\sigma = 10$, $\rho = 28$, $\beta = 8/3$ und Startwert $x_0 = y_0 = z_0 = 5$. Dazu ist natürlich die Gleichung *und* die linearisierte Lorenzgleichung einzugeben, d.h. man betrachtet insgesamt 12 Gleichungen. Für t wähle die Werte 10, 15, 16.5, Schrittweite zwischen 0.01 und 0.05, Runge–Kutta–Verfahren. Wie groß ist wohl der Betrag des größten Eigenwertes von $W(t)$ ungefähr (ganz grobe Schätzung)? Deutung?

Aufgabe 26 Finde ein Gegenbeispiel, das zeigt, dass für reelle (2×2)-Matrizen A, B die Identität

$$\mathrm{e}^A\,\mathrm{e}^B \;=\; \mathrm{e}^B\,\mathrm{e}^A$$

nicht zu gelten braucht.