Übungen

Einführung in die Dynamischen Systeme

Stefan Liebscher

Abgabe: Mittwoch, 01.06.2005, in der Vorlesung

Aufgabe 27 [Lissajous-Figuren] Betrachte für eine symmetrische, reelle (2×2)-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

das Hamilton-System

$$(*) \qquad \ddot{x} = -Ax$$

zur Hamiltonfunktion

$$H(x, \dot{x}) = \tfrac{1}{2}(\dot{x}^{\mathrm{T}}\dot{x} + x^{\mathrm{T}}Ax).$$

(i) Transformiere $(*)$ auf die Gestalt entkoppelter „Pendel“,

$$(**) \qquad \begin{aligned} \ddot{y}_1 + \omega_1 y_1 &= 0, \\ \ddot{y}_2 + \omega_2 y_2 &= 0, \end{aligned}$$

mit ω_1, ω_2 reell.

(ii) Skizziere (ohne `dstool` etc.) die Lösung $(x_1(t), x_2(t))$ von $(*)$ für

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

mit Anfangsbedingung $x_1 = x_2 = \dot{x}_1 = -\dot{x}_2 = 1$.

(iii) Zeichne (mit `dstool`) je einige Lösungskurven von $(*)$ für drei selbst gewählte Wertepaare (ω_1, ω_2) mit $\omega_i > 1$.

Aufgabe 28 Betrachte den Banachraum $\mathcal{BC}^1$ der stetig differenzierbaren Vektorfelder $f : X \to X = \mathbb{R}^n$, für die gilt

$$\|f\|_{\mathcal{BC}^1} := \sup_{x\in X}(|f(x)| + |f'(x)|) < \infty.$$

Seien $f, g \in \mathcal{BC}^1$ und bezeichne $x(t, f)$ die Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \qquad x(0) = x_0$$

zur Zeit t. Kann man, für festes t, die Abbildung

$$x(t, \cdot) : \mathcal{BC}^1 \longrightarrow X, \qquad f \longmapsto x(t, f),$$

nach f differenzieren? Welche Variationsgleichung erfüllt ggf. die Richtungsableitung $v(t) := \partial_f x(t, f)g$?

Aufgabe 29 Führe das Picard-Iterationsverfahren für die autonome, lineare Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t), \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \\ x(0) &= x_0, \end{aligned}$$

explizit durch. Die Startfunktion ist $x^0(t) \equiv x_0$. Auf welchem t-Intervall konvergiert die Iteration?

Aufgabe 30 Bestimme die Lösungen der linearen Differentialgleichungen

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x, \qquad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} x, \qquad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$