Übungen

Einführung in die Dynamischen Systeme

Stefan Liebscher

Abgabe: Mittwoch, 08.06.2005, in der Vorlesung

Aufgabe 31 [Diskrete Turing-Instabilität] Betrachte das gekoppelte lineare System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + D(y-x),\\ \dot{y} &= Ay + D(x-y),\end{aligned}$$

mit x, y in $\mathbb{R}^n$. D bezeichnet eine Diagonalmatrix $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$, wobei alle $d_i > 0$ sind. Außerdem sei $\Re\mathrm{e}\,\mathrm{spec}(A) < 0$.

(i) Zeige: wenn $x(0) = y(0)$, dann konvergieren $x(t)$, $y(t)$ gegen 0 für $t \to +\infty$.

(ii) Finde trotzdem Matrizen A, D, so dass $x(t) \to \infty$ für gewisse $x(0)$, $y(0)$ und $t \to +\infty$.

Hinweis: Wähle im zweiten Teil $n = 2$ und betrachte anschließend den *invarianten* Unterraum $\{x = -y\}$.

Aufgabe 32 In Analogie zur Darstellung eines Flusses zu einem Vektorfeld durch Variation der Konstanten wollen wir die Dynamik einer Abbildung beschreiben.

Gegeben sei also ein Banachraum X sowie Abbildungen $A : X \to X$ linear, $f : \mathbb{N} \to X$. Vervollständige nun die Formel

$$x(n) \;=\; A^{\bigcirc} x_0 + \sum_{k=\bigcirc}^{\bigcirc} A^{\bigcirc} f(\bigcirc)$$

und beweise, dass dadurch die eindeutige Lösung $x : \mathbb{N} \to X$ des Anfangswertproblems

$$x(0) \;=\; x_0, \qquad x(n+1) \;=\; A\,x(n) + f(n), \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

gegeben ist.

Aufgabe 33 Wieviele Ziffern besitzt das einmillionste Glied der Folge (1, 3, 8, 20, 48, 112, . . .), das heißt $x_n = 4x_{n-1} - 4x_{n-2}$ mit $x_0 = 1$ und $x_1 = 3$?

Aufgabe 34 Sei $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sei eine stetig differenzierbare Abbildung. Weiter sei $p \in \mathbb{R}^n$ ein Fixpunkt von Ψ und die Jacobi-Matrix $D\Psi(p)$ habe nur Eigenwerte vom Betrag echt kleiner als 1.

Zeige, dass dann eine Umgebung U von p existiert mit der Eigenschaft

$$\Psi^k(x) \in U \quad \text{für alle } x \in U \text{ und alle } k \geq 0 \qquad \text{sowie} \qquad \lim_{k\to\infty} \Psi^k(x) \;=\; p.$$

Wie lautet das entsprechende Kriterium für die asymptotische Stabilität von Fixpunkten im Spezialfall $n = 1$?

Freiwilliger Zusatz: Zeige, dass die Umgebung U beliebig klein gewählt werden kann, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine Umgebung U wie oben, die Teilmenge des ε-Balls um p ist.