Übungen

Einführung in die Dynamischen Systeme

Stefan Liebscher

Abgabe: Mittwoch, 15.06.2005, in der Vorlesung

Aufgabe 35 Jede Trajektorie des Lipschitz-Vektorfeldes f sei beschränkt. Beweise oder widerlege: Gilt für die Anfangswerte

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}(x_n, x) \;=\; 0,$$

so auch für ihre ω-Limesmengen

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}(\omega(x_n), \omega(x)) \;=\; 0.$$

Dabei benutzen wir als Abstandsbegriff zweier (abgeschlossener) Mengen den symmetrischen Hausdorff-Abstand:

$$\operatorname{dist}(A, B) := \;\max\left(\sup_{a\in A}\inf_{b\in B} \operatorname{dist}(a,b)\,,\; \sup_{b\in B}\inf_{a\in A} \operatorname{dist}(a,b)\right).$$

Aufgabe 36 Bestimme die ω-Limesmengen *jeder* Trajektorie von

(i) $\dot{x} \;=\; x^3 + 3x^2 - 6x - 8, \qquad x \in \mathbb{R};$

(ii) $\dot{x} \;=\; \sin(x), \qquad x \in \mathbb{R};$

(iii) $\begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \cos x_2 \\ \cos x_1 \end{pmatrix}, \qquad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$

Hinweis: Bestimme in der letzten Teilaufgabe ein erstes Integral.

Aufgabe 37 Sei $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ eine reelle $(n\times n)$-Matrix. Zeige, dass die Koeffizienten der Matrix e^{At} genau dann für alle $t \geq 0$ nicht-negativ sind, wenn $a_{ij} \geq 0$ für alle $i \neq j$.

Hinweis: Es genügt, den Fall zu betrachten, dass *alle* $a_{ij} \geq 0$ sind. (Warum?)

Aufgabe 38 [Diskrete Lyapunov-Funktion] Wir stellen uns ein Dreieck gekoppelter „Oszillatoren“ vor, so dass jeder den nächsten anregt:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i \;&=\; f(x_i, x_{i-1}), \qquad i \pmod{n}, \quad n = 3, \\ x(0) \;&:=\; x^0 \;\neq\; 0, \qquad x \;=\; (x_0, ..., x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Sei dabei f glatt, $f(0,0) = 0$ und $f(0,y)y > 0$ für alle $y \neq 0$. Der zugehörige Fluss existiere global. Falls alle $x_i \neq 0$ sind, definiere $z(x)$ als Anzahl der i, für die $x_i x_{i-1} < 0$ gilt. Bezeichne ferner $S(x^0)$ die Menge der Zeiten t, zu denen $x_i = 0$ für mindestens ein i ist. Zeige:

(i) S ist diskret;

(ii) $z(x(t_1)) \geq z(x(t_2))$, wenn $t_1 < t_2$ beide nicht in S liegen.

Freiwilliger Zusatz: Gilt das auch für eine höhere Anzahl $n > 3$ von Oszillatoren?