Übungen

Einführung in die Dynamischen Systeme

Stefan Liebscher

Abgabe: Mittwoch, 22.06.2005, in der Vorlesung

Aufgabe 39 Ein Student hat dem Professor sein Manuskript geklaut. Der Dieb beginnt zur Zeit $t = 0$ mit konstanter Geschwindigkeit v auf einem Kreis mit Radius r entlangzulaufen. Der Professor startet ebenfalls zur Zeit $t = 0$ im Mittelpunkt des Kreises und läuft mit konstanter Geschwindigkeit w immer genau auf den Dieb zu.

Zeige, dass im Fall $w < v$ der Professor den Studenten nie erreicht, sondern sich immer mehr einer Kreisbahn annähert. Welchen Radius hat dieser Kreis? Ist diese Kreisbahn ein stabiler periodischer Orbit? Wie sieht es für gut durchtrainierte Professoren ($w > v$) aus?

Hinweis: Mögliche Koordinaten sind beispielsweise die Entfernung $\varrho(t)$ zwischen Professor und Student und der Winkel $\theta(t)$ zwischen Professor und Kreismittelpunkt aus Sicht des Studenten.

Freiwilliger Zusatz: In einem beschränkten ebenen Vorlesungssaal wird ein intelligenter Student von einem Professor gejagt. Beide Akteure laufen mit konstanter Geschwindigkeit 1. Kann der Professor den Studenten einholen?

Aufgabe 40 Seien $A \subseteq B \subseteq X$ Mengen und Φ_t ein Fluss auf X. A heißt *ketten-rekurrent* in B, wenn es für jedes $x_0 \in A$ und alle $\varepsilon > 0$, $T > 0$ ein positives n sowie Zeiten $t_0, \ldots, t_{n-1} \geq T$ und Punkte $x_1, \ldots, x_{n-1} \in B$ gibt, so dass für $i = 0, \ldots, n-1$ gilt

$$\operatorname{dist}(\Phi_{t_i}(x_i), x_{i+1}) \;<\; \varepsilon.$$

Dabei ist $x_n = x_0$ gesetzt. A heißt *rekurrent*, wenn man stets $n = 1$ wählen kann, d.h. wenn x_0 in $\omega(x_0)$ liegt.

Interpretiere Kettenrekurrenz, z.B. als Rundungs- oder Messfehler. Zeige, dass für $y_0 \in X$ die ω-Limesmenge $\omega(y_0)$ ketten-rekurrent in X aber nicht unbedingt rekurrent ist.

Freiwilliger Zusatz: Sei die Trajektorie $\Phi_t(y_0)$ beschränkt. Ist dann $\omega(y_0)$ ketten-rekurrent sogar in $\omega(y_0)$?

Aufgabe 41 Betrachte des Räuber-Beute System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(1 - ax - y), \\ \dot{y} &= y(-c + x - by), \end{aligned}$$

mit $a, b, c > 0$, $ac < 1$ und Anfangsbedingungen $x_0, y_0 > 0$. Zeige, dass genau eine Ruhelage (x^*, y^*) mit $x^*, y^* > 0$ existiert und dass

$$\omega((x_0, y_0)) \;=\; \{(x^*, y^*)\}$$

für alle Anfangsbedingungen $x_0 > 0$, $y_0 > 0$.

Hinweis: Vergleiche mit dem Fall $a = b = 0$.

Aufgabe 42 Gegeben ein stetiger Fluss auf X und eine nicht-leere, kompakte, invariante Teilmenge M von X. Beweise oder widerlege: M ist genau dann stabil, wenn jede (offene) Umgebung von M eine positiv invariante (offene) Umgebung von M enthält.