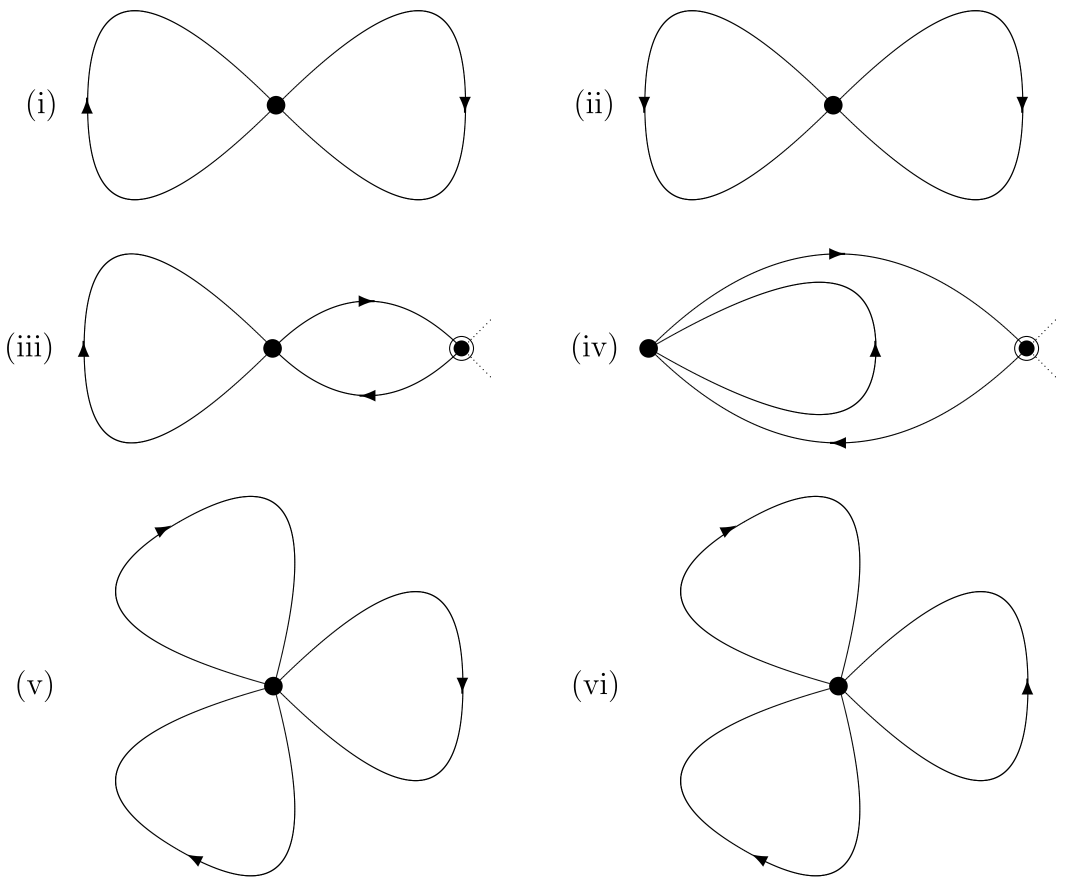
Übungen

Einführung in die Dynamischen Systeme

Stefan Liebscher

Abgabe: Mittwoch, 29.06.2005, in der Vorlesung

Aufgabe 43 Welche der folgenden Mengen können ω-Limesmengen eines Flusses im $\mathbb{R}^2$ sein und welche nicht? Begründe, ohne explizite Vektorfelder anzugeben.



Dabei bezeichnen Scheiben ● Gleichgewichte, beringte Scheiben ◉ stellen hyperbolische Sättel dar.

Aufgabe 44 Beweise oder widerlege den Satz von Poincaré & Bendixson für Flüsse

(i) auf der Sphäre S^2,
(ii) auf dem Torus T^2.

Aufgabe 45 Sei $X \subset \mathbb{R}^2$ eine Kreisscheibe mit ℓ disjunkten kreisförmigen Löchern und f ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf X mit $\operatorname{div} f > 0$. Zeige, dass dann der zugehörige Fluss höchstens ℓ periodische Orbits in X besitzen kann.

Aufgabe 46 Sei $x = 0$ ein *isoliertes* Gleichgewicht eines Flusses im $\mathbb{R}^2$. Zeige:

(i) $x = 0$ ist genau dann stabil aber kein Attraktor, wenn jede Umgebung von $x = 0$ (mindestens) einen (echt) periodischen Orbit enthält.
(ii) Falls eine C^2-Lyapunov-Funktion V mit $\nabla V(0) = 0$ und indefiniter Hesse-Matrix $\nabla^2 V(0)$ existiert, so ist $x = 0$ instabil.