Übungen

Einführung in die Dynamischen Systeme

Stefan Liebscher

Abgabe: Mittwoch, 6.7.2005, in der Vorlesung

Aufgabe 47 [Floquet-Theorie in einer Dimension] Betrachte das zeitabhängige, periodische Vektorfeld

$$\dot{x} \;=\; a(t)x, \qquad a(t+2\pi) \;=\; a(t), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Zeige (direkt, d.h. ohne den allgemeinen Satz der Vorlesung zu benutzen), dass die Lösung dargestellt werden kann als

$$x(t) \;=\; \mathrm{e}^{bt}\, q(t)\, x_0,$$

mit periodischer Funktion q, $q(t+2\pi) = q(t)$, sowie einer Konstanten $b \in \mathbb{R}$. Bestimme b und q in Abhängigkeit von a.

Aufgabe 48 [Floquet-Theorie für diskrete dynamische Systeme] Betrachte die Iteration

$$x_{k+1} \;=\; A_k x_k$$

mit $A_{k+p} = A_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und einer feste Periode $p \in \mathbb{N}$. Weiter seien alle Matrizen A_k regulär.

Zeige, dass Matrizen B, C_k, $k \in \mathbb{N}$ existieren mit $C_k = C_{k+p}$ und

$$\prod_{k=0}^{m} A_k \;=\; C_m B^m, \qquad \text{füe alle } m \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 49 Zeige, dass die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= (1 - x^2 - y^2)y - x \end{aligned}$$

genau eine (echt) periodische Lösung besitzt. Wie lautet die Matrix-Differentialgleichung für die Ableitung nach den Anfangsbedingungen (x_0, y_0) entlang dieser Lösung?

Aufgabe 50 [Arnold, Russische Beispiel-Prüfungsaufgabe] Beim Anlegen eines Schiffes wird ein Seil um einen am Ufer stehenden (zylinderförmigen) Pfahl geschlungen. Berechne die Kraft, mit der das Schiff gebremst wird, wenn das Seil dreimal um den Pfahl geschlungen wird, der Reibungskoeffizient des Seils am Pfahl 1/3 beträgt und ein Dock-Arbeiter am freien Endes des Seils mit einer Kraft von $100N$ (Dies entspricht etwa der Kraft, um $10kg$ Kartoffeln zu heben.) zieht.