Komplett freiwillige Übungen

Einführung in die Dynamischen Systeme

Stefan Liebscher

Besprechung auf Wunsch im Tutorium, ggf. auch kommendes Semester

Aufgabe Z1 [Arnol'd, Kapitel 3.16, Aufgabe 2] Wir wollen analytisch nachprüfen, dass die obere (im allgemeinen instabile) Gleichgewichtslage eines Pendels durch vertikale Schwingung des Aufhängepunktes stabilisiert werden kann.

Sei die Pendelarmlänge ℓ. Die Anregung am Aufhängepunkt habe die Amplitude $a \ll \ell$ und die Periode 2τ, wobei zur Vereinfachung der Rechnung die Beschleunigung stückweise konstant $\pm c = \pm 8a/\tau^2$ sein soll. Die Bewegungsgleichung des Pendels kann dann auf die Gestalt

$$\ddot{x} \;=\; (\omega^2 \pm \alpha^2)x$$

mit $\omega^2 = g/\ell$, $\alpha^2 = c/\ell$ gebracht werden, wobei das Vorzeichen jeweils nach der Zeit τ wechselt. Für hinreichend schnelle Anregung ($\tau \ll 1$) ist $\alpha^2 = 8a/(\ell\tau^2) > \omega^2$.

Wie schnell muss die Anregung mindestens sein, damit das kopfstehende Pendel stabil wird?

Aufgabe Z2 [Arnold, Russische Beispiel-Prüfungsaufgabe] Der experimentellen Erfahrung nach wird ein Lichtstrahl beim Auftreffen auf eine Grenzschicht zweier Medien gebrochen:

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} \;=\; \frac{n_2}{n_1},$$

mit Winkeln α_1, α_2 zwischen Einfalls- bzw. Austrittsstrahl und der Normalen zur Grenzfläche sowie Brechungsindizes n_1, n_2 der beiden Medien.

Bestimme die Gestalt der Lichtstrahlen in einer Ebene $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit Brechungsindex $n = n(y)$. Studiere insbesondere den Fall $n(y) = 1/y$.

Bemerkung: Die Halbebene $\{y > 0\}$ mit Brechungsindex $n(y) = 1/y$ stellt ein Modell der (nicht-Euklidischen) Lobačevskij-Geometrie dar.

Aufgabe Z3 [Arnold, Russische Beispiel-Prüfungsaufgabe] Zeichne die Lichtstrahlen, die vom Ursprung in verschiedene Richtungen ausgehen, in der Ebene mit Brechungsindex $n = y^4 - y^2 + 1$.

Bemerkung: Dies erklärt beispielsweise die Luftspiegelung. Der Luft über der (aufgeheizten) Wüste hat ihren maximalen Brechungsindex deutlich oberhalb des Bodens (infolge verdünnter Luft direkt über dem Boden sowie in großen Höhen).

Im Ozean befindet sich eine Schicht mit maximalem Brechungsindex (und minimaler Schallgeschwindigkeit) etwa in einer Tiefe von 500-1000 Metern. Dadurch entstehen akustische Kanäle.

Aufgabe Z4 Beweise oder widerlege: Erfüllen zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Gleichung

$$\mathrm{e}^A \;=\; \mathrm{e}^B \;=\; \mathrm{e}^{A+B} \;=\; \mathrm{id}$$

so kommutieren sie, d.h. $AB = BA$.

Aufgabe Z5 Kann ein instabiles Gleichgewicht stabil bezüglich des linearisierten Vektorfeldes sein? Kann es sogar asymptotisch stabil sein? Kann ein asymptotisch stabiles Gleichgewicht bezüglich des linearisierten Vektorfeldes instabil sein?

Aufgabe Z6 Der Satz von Grobman & Hartman sichert die $\mathcal{C}^0$-Flussäquivalenz eines Vektorfeldes zu seiner Linearisierung nahe eines *hyperbolischen* Gleichgewichtes.

Finde ein Beispiel eines Vektorfeldes mit *nicht-hyperbolischem* Gleichgewicht, das trotzdem $\mathcal{C}^0$-flussäquivalent zur entsprechenden Linearisierung ist, und eines, für das die Flussäquivalenz scheitert.

Aufgabe Z7 Sei $y(t)$ eine stetige Funktion, die der Integralgleichung

$$y(t) \;=\; \int_0^t y(s)^\alpha \sin(2005\, y(s))\, \mathrm{d}s,$$

für ein gegebenes $\alpha \geq 0$ und alle $t \in [0,1]$ genügt.

Beweise: $y(t) \equiv 0$ ist konstant für alle $t \in [0,1]$. Auf welche $\alpha \in [-1,0)$ lässt sich das Resultat verallgemeinern?

Aufgabe Z8 Beweise oder widerlege für Vektorfelder f im $\mathbb{R}^3$: Gilt $\operatorname{div} f = 0$ so hat f ein reguläres Erstes Integral.

Erinnerung: Ein Erstes Integral I heißt genau dann regulär, falls ∇I nur in Nullstellen des Vektorfeldes verschwindet.