

Übungen
Dynamische Systeme II
Stefan Liebscher
Abgabe bis Freitag, 16.12.2005

Aufgabe 29 Definiere für eine feste, irrationale Zahl $0 < \alpha < 1$ die Folge

$$s_n := \text{sign}(\sin(n\pi\alpha)), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Durch

$$w_n := |s_n - s_{n+1}|/2$$

werden dann die Vorzeichenwechsel der Folge s_n markiert. Beweise, dass

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N w_n = \alpha.$$

Freiwilliger Zusatz: Kann man auch rationale α aus der Folge w_n zurückgewinnen?

Aufgabe 30 Sei $f : S^1 \rightarrow S^1$ ein Homöomorphismus der Kreislinie, der die Orientierung *umkehrt*. Definiere trotzdem eine Rotationszahl analog zu orientierungserhaltenden Diffeomorphismen.

Zeige, dass dann für die Rotationszahl $\rho(f)$ stets gilt: $\rho(f) = 0$.

Aufgabe 31 Betrachte das Vektorfeld

$$\dot{y} = f(y), \quad y \in S^1, \quad f(y) > 0$$

mit zugehörigem Fluss φ_t . Leite mittels Trennung der Variablen eine Formel für die Rotationszahl der Zeit- 2π -Abbildung $\varphi_{2\pi}$ her.

Aufgabe 32 Bestimme für alle α die Rotationszahl $\rho(\alpha)$ der Stroboskop-Abbildung zur Zeit $t = 2\pi$ der Differentialgleichung

$$\dot{x} = \alpha + \sin(x - t), \quad x \in S^1.$$

Warum ergibt sich lediglich eine Stufe aber keine „Teufelstreppe“?