Komplett freiwillige Übungen zur Verkürzung der Wartezeit auf das Neue Jahr

Dynamische Systeme II

Stefan Liebscher

Abgabe bis Freitag, 6.1.2006

Aufgabe X1 Es ist bekannt, dass jeder Fluss φ_t auf dem 2-Torus ohne stationäre oder periodische Lösungen eine globale Transversale S besitzt. Dies bedeutet, S ist eine geschlossene Kurve, die jede Trajektorie schneidet und überall transversal zum Vektorfeld ist.

Finde einen Fluss φ_t auf dem 2-Torus mit (zwei) periodischen Orbits aber nach wie vor ohne Gleichgewichte, der keine solche globale Transversale ermöglicht.

Aufgabe X2 Betrachte die Abbildung $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$A(y) \;=\; \begin{cases} 2y, & 0 \le y < 1 \\ A(y-1)+1, & 1 \le y \\ A(y+1)-1, & y < 0 \end{cases}$$

Dann definiert A eine Abbildung a der Kreislinie $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ in sich. Natürlich ist a kein Diffeomorphismus. Lässt sich trotzdem zu Anfangswerten y_0 eine Rotationszahl $\varrho(y_0)$ definieren? Hängt diese ggf. von y_0 ab?

Aufgabe X3 Zeige durch ein Gegenbeispiel, dass ein Homöomorphismus f der Kreislinie mit rationaler Rotationszahl $\rho(f)$ nicht konjugiert zur Drehung um den Winkel $\rho(f)$ sein muss. Finde eine zusätzliche, notwendige und hinreichende Bedingung an f, so dass dies doch gilt.

Aufgabe X4 Eine punktförmige Billardkugel bewegt sich reibungslos und geradlinig im Einheitsquadrat Q. Die Anfangssteigung ist irrational. An den Rändern wird sie jeweils reflektiert, wobei Einfalls- und Ausfallswinkel übereinstimmen.

Sei M eine offene Teilmenge von Q mit Fläche m, und bezeichne $\mu(t)$ die Gesamtlänge der Zeitintervalle in $[0, t]$, zu denen sich die Billardkugel durch M bewegt. Zeige:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mu(t)}{t} \;=\; m.$$

Freiwilliger Zusatz: Darf Q auch ein Rechteck der Fläche 1 sein? Oder ein Würfel oder Quader?

Aufgabe X5 Betrachte die Van-der-Pol-Gleichung

$$\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

mit dem kleinen Parameter ε. Schreibe die Gleichung als System von Gleichungen 1. Ordnung und berechne die Eigenwerte $\lambda_{1,2}(\varepsilon)$ der Linearisierung in der Ruhelage $x \equiv 0$ in Abhängigkeit von ε.

Wann ist die Ruhelage asymptotisch stabil, wann verliert sie ihre Stabilität? Welche Verzweigung tritt dann auf? Überprüfe Deine Vermutung numerisch oder beweise sie. Dabei hilft Gleichung (3.4.11) aus [Guckenheimer/Holmes].

Aufgabe X6 Betrachte die Drehung

$$R_\varrho : S^1 \to S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \qquad x \longmapsto x + \varrho \pmod 1$$

um einen irrationalen Winkel ϱ. Die Folge $n_1, n_2, n_3, \ldots$ ist wie folgt definiert: Die Iterierte $S_\varrho^{n_i}(0)$ ist näher an $x = 0$ als alle vorhergehenden Iterierten $\{S_\varrho^1(0), \ldots, S_\varrho^{n_i-1}(0)\}$.

Bestimme experimentell für 3 selbstgewählte Werte ϱ die ersten fünf Folgenglieder.

Stelle eine Vermutung auf, wie die Folge $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit der Kettenbruchentwicklung von ϱ zusammenhängt. Kannst Du diese Vermutung ganz oder teilweise beweisen ?

Aufgabe X7 Finde für ein vorgegebenes $n \in \mathbb{N}$ einen Diffeomorphismus $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, der genau einen periodischen Orbit der Periode n und keine weiteren periodischen Punkte besitzt.

Frohe Weihnachten,
einen guten Rutsch
und ein glückliches & friedvolles Neues Jahr